Τράπεζα θεμάτων 14-7-2021

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

www.Askisopolis.gr

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

2ο Θέμα

1251. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \delta-\gamma=4\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$

β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\beta(\delta-\gamma)}\overset{(\alpha\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha)}{=}\frac{\gamma(3\beta+\beta)}{\beta(5\gamma-\gamma)}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$

1254. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$. **(Μονάδες 12)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$

β) $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+2x^2}{2x^2}=\frac{18\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=9$

1318. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. **(Μονάδες 13)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\alpha^2+1)=\alpha(\beta^2+1) \Leftrightarrow \beta\alpha^2+\beta=\alpha\beta^2+\alpha \Leftrightarrow \beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta-\alpha=0 \Leftrightarrow$

$\beta\alpha(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta\alpha-1)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} \beta\alpha-1=0 \Leftrightarrow \beta\alpha=1$. Άρα α, β αντίστροφοι.

β) $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot 1}=\alpha^{22-(-2)}\cdot\beta^{24}=\alpha^{24}\cdot\beta^{24}=(\alpha\cdot\beta)^{24}=1$

12685. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:**

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$ **(Μονάδες 12)**

β) α=β . **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4 \Leftrightarrow \alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha\frac{1}{\beta}+\beta\frac{1}{\alpha}+\beta\frac{1}{\beta}=4 \Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$

β) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow \alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta\frac{\beta}{\alpha}=2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

13088. **Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$.**

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$ **(Μονάδες 13)**

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2=2(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)-6xy-y^2=$

$2x^2+4xy+2y^2-x^2+2xy-y^2-6xy-y^2=2x^2+\cancel{6xy}+\cancel{2y^2}-x^2-\cancel{6xy}-\cancel{2y^2}=x^2$

β) Για x =2021 και y = 1 η παράσταση A γίνεται:

$A=2(2021+1)^2-(2021-1)^2-6\cdot 2021\cdot 1-1^2=2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1=B$

Όμως $A = x^2$ και για x = 2021 είναι $A=2021^2$, οπότε $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1 = 2021^2$

Επομένως ο αριθμός B είναι ίσος με το τετράγωνο του 2021.

13323. **α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17$.** **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $(x-1)^2+(y+4)^2=x^2-2x+1+y^2+8y+16=x^2+y^2-2x+8y+17$

β) $x^2+y^2-2x+8y+17=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ και $(y+4=0 \Leftrightarrow y=-4)$

13053. **Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.**

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$. **(Μονάδες 6)**

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$ **(Μονάδες 6)**

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i. $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \beta+\gamma=-\alpha$

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\dfrac{\alpha^{\cancel{2}}}{-\cancel{\alpha}}=-\alpha$

β) Είναι $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$

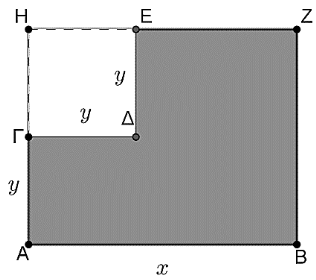
$\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\beta^{\cancel{2}}}{-\cancel{\beta}}=-\beta$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma^{\cancel{2}}}{-\cancel{\gamma}}=-\gamma$

$\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

Διάταξη πραγματικών αριθμών

2ο Θέμα

1261. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x+4y$ **(Μονάδες 10)**

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\Pi = \mathrm{EZ}+\mathrm{ZB}+\mathrm{BA}+\mathrm{A\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{E} = x\cancel{-y}+2y+x\cancel{+y}+y+y=2x+4y$

β) $5<x<8 \Leftrightarrow 10<2x<16$ (1), $1<y<2 \Leftrightarrow 4<4y<8$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε: $14<2x+4y<24 \Leftrightarrow 14<\Pi<24$

1287. Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{K}=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $\mathrm{K}\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 12)**

β) Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $\mathrm{K}=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\mathrm{K}\geq\Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha-\beta)^2\geq 0$ το οποίο ισχύει αφού $\alpha^2\geq 0$ και $(\alpha-\beta)^2\geq 0$.

β) $\mathrm{K}=\Lambda \Leftrightarrow \mathrm{K}-\Lambda=0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\alpha=\beta$. Άρα $\alpha=\beta=0$

1298. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. **(Μονάδες 10)**

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Αν Π η περίμετρος τότε $\Pi = 2x + 2y$. Είναι $4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ (1), $2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6$ (2) και με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε $12 \le 2x + 2y \le 20 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$

β) Αν Π΄ η νέα περίμετρος τότε $\Pi' = 2(x-1) + 6y = 2x - 2 + 6y = 2x + 6y - 2$
Είναι $4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ (1) και $2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18 \Leftrightarrow 10 \le 6y - 2 \le 16$ (3)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (3) έχουμε: $18 \le 2x + 6y - 2 \le 30 \Leftrightarrow 18 \le \Pi' \le 30$

1314. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$.
Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)
β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1) και $-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$ (2)
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε: $8 \le \alpha - 2\beta \le 12$

β) $2 \le \alpha \le 4 \Leftrightarrow 4 \le \alpha^2 \le 16$ (3) $-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$ (2)
Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $12 \le -2\alpha\beta \le 32$ (4)
Με πρόσθεση (3) και (4) κατά μέλη έχουμε $16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$

1317. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)
β) Να δείξετε ότι: $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - [2\alpha(3-\beta)] = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\alpha + 9 =$
$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β) $K - \Lambda = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 \ge 0$ για κάθε .

γ) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ και $\alpha = 3$. Άρα $\alpha = 3,\ \beta = -3\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1324. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$,
να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $y - x$ (Μονάδες 12)
β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $-2 \le y \le -1$ (1) και $3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $-7 \le y - x \le -4$.

β) $-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4$ (3), $3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25$ (4)

Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη έχουμε $9 \le x^2 + y^2 \le 29$

1352. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$. **(Μονάδες 13)**

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) $\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) < 0$ το οποίο ισχύει αφού $\alpha > 0$ και $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 < 0$

β) Είναι $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\alpha} > 1$, τότε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

1353. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$ **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

1368. Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **(Μονάδες 5)**

β) $2x - 3y$ **(Μονάδες 10)**

γ) $\frac{x}{y}$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $2 \le x \le 3$ (1) και $1 \le y \le 2$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $3 \le x + y \le 5$

β) (1) $\Leftrightarrow 4 \le 2x \le 6$ (3), (2) $\Leftrightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3) και (4) και έχουμε $-2 \le 2x - 3y \le 3$

γ) (2) $\Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (5) και έχουμε: $1 \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3$

1373. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ **(Μονάδες 12)**

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \overset{(\cdot\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

β) Είναι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (1) και όμοια $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

12673.Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. **(Μονάδες 13)**

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι $0 < \alpha < \beta$, άρα $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$.

β) Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^3 < \beta^3$ (1) και από το α σκέλος είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

2ο Θέμα

1239. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$.

ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$ **(Μονάδες 12)**

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$ **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i) $x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$ και $|3x-6| = 3x-6$. Άρα $A = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$

ii) $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$ και $|3x-6| = -3x+6$. Άρα $A = -3x + 6 + 2 = -3x + 8 = 8 - 3x$

β) $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=\dfrac{(3x-4)(3x+4)}{A}\overset{x\geq 2}{=}\dfrac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{3x-4}}=3x+4$

1248. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4 \Leftrightarrow y\in(2,4)$

β) $E=x\cdot y$, Είναι $1<x<3\,(1)$ και $2<y<4\,(2)$ Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε $2<x\cdot y<12 \Leftrightarrow 2<E<12 \Leftrightarrow E\in(2,12)$.

1252. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4 \Leftrightarrow y\in(2,4)$

β) $\Pi=2x+2y$, Είναι $1<x<3 \Leftrightarrow 2<2x<6$ (1) και $2<y<4 \Leftrightarrow 4<2y<8$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $6<2x+2y<14 \Leftrightarrow 6<\Pi<14$

1258. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. **(Μονάδες 10)**

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10}$ **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Είναι $5<x<10$, άρα $x-5>0 \Leftrightarrow |x-5|=x-5$ και $x-10<0 \Leftrightarrow |x-10|=-x+10$

β) $A=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10}\overset{(\alpha\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha)}{=}\dfrac{x-5}{x-5}+\dfrac{-x+10}{x-10}=\dfrac{\cancel{x-5}}{\cancel{x-5}}-\dfrac{\cancel{x-10}}{\cancel{x-10}}=1-1=0$

1260. Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ **(Μονάδες 13)**

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι $1<x<2$, άρα $x-1>0 \Leftrightarrow |x-1|=x-1$ και $x-2<0 \Leftrightarrow |x-2|=-x+2$

Άρα $A=x-1-(-x+2)=x-1+x-2=2x-3$

β) Είναι $x<1 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow |x-1|=-x+1$ και $x<1 \Leftrightarrow x-2<-1<0 \Rightarrow |x-2|=-x+2$

Άρα $A=-x+1-(-x+2)=\cancel{-x}+1+\cancel{x}-2=-1$

1268. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $|x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le x\le 5$ και $|y-6|\le 4 \Leftrightarrow -4\le y-6\le 4 \Leftrightarrow 2\le y\le 10$

β) Αν Π η περίμετρος τότε $\Pi=2x+2y$. Είναι $1\le x\le 5 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 10$ (1), $2\le y\le 10 \Leftrightarrow 4\le 2y\le 20$ (2) και με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $6\le 2x+2y\le 30 \Leftrightarrow 6\le \Pi\le 30$.

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι 6 και η μεγαλύτερη τιμή είναι 30.

1320. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x\le \frac{3}{2}$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $x\le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $d(2x,3)=3-2x \Leftrightarrow |2x-3|=3-2x$, το οποίο ισχύει όταν $2x-3\le 0 \Leftrightarrow 2x\le 3 \Leftrightarrow x\le \frac{3}{2}$.

β) Από (α) ερώτημα είναι $|2x-3|=3-2x$. $x\le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x\le 3 \Leftrightarrow -2x\ge -3 \Leftrightarrow 6-2x\ge 3>0$

Άρα $|6-2x|=6-2x$ και $K=|2x-3|-2|3-x|=|2x-3|-|6-2x|=3-2x-(6-2x)=3\cancel{-2x}-6\cancel{+2x}=-3$

Επομένως η παράσταση Κ ανεξάρτητη του x.

1322. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$. **(Μονάδες 12)**

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow |x+1|=x+1$ και $x-5<0 \Leftrightarrow |x-5|=-x+5$

Άρα $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}+5}{3}=\frac{6}{3}=2$

1323. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$. **(Μονάδες 12)**

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$ **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y \in (1,3)$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $y>1 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow |y-1| = y-1$ και $y<3 \Leftrightarrow y-3<0 \Leftrightarrow |y-3| = -y+3$

Άρα $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2} = \dfrac{\cancel{y}-1-\cancel{y}+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

1342. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$. **(Μονάδες 15)**

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, x, x^2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $x<1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2<x$, άρα $x^2<x<1$.

1366. α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \le -2$. **(Μονάδες 15)**

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right| \ge 2$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \le -2 \overset{(\cdot\alpha<0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1 \ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1+2\alpha \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \ge 0$ το οποίο ισχύει.

β) $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right| \ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|} \ge 2 \overset{|\alpha|>0}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2+1 \ge 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha|+1 \ge 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-1)^2 \ge 0$ το οποίο ισχύει.

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται το $\alpha<0$.

1371. α) Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2$ (1) **(Μονάδες 15)**

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}+\dfrac{|\beta|}{|\alpha|} \ge 2 \overset{(\cdot|\alpha||\beta|)}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2+|\beta|^2 \ge 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta| \ge 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2 \ge 0$ το οποίο ισχύει.

β) $(|\alpha|-|\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha|-|\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \pm\beta$

1383. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$. **(Μονάδες 12)**

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$

β) Αφού $-3<x<1$ είναι $x+3>0$ και $x-1<0$.

Τότε $|x+3|=x+3$, $|x-1|=1-x$ και $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}=\dfrac{x+3+1-x}{4}=1$

1384. Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. **(Μονάδες 12)**

β) $0<A<4$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Αφού $1<x<4$ ισχύει ότι $x-1>0$ και $|x-1|=x-1$. Επειδή $2<y<3$, ισχύει ότι $y-3<0$ και $|y-3|=3-y$. Άρα $A=x-1+3-y=x-y+2$.

β) Είναι $1<x<4$ (1) και $2<y<3 \Leftrightarrow -2>-y>-3 \Leftrightarrow -3<-y<-2 \Leftrightarrow -1<-y+2<0$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $0<x-y+2<4 \Leftrightarrow 0<A<4$

13177. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α β, για τους οποίους ισχύει $2\le\alpha\le3$ και $-2\le\beta\le-1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3|=3-\alpha$ και $|\beta+2|=\beta+2$ **(Μονάδες 8)**

β) Να δείξετε ότι: $0\le\alpha+\beta\le2$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Είναι $2\le\alpha\le3 \Leftrightarrow 2-3\le\alpha-3\le3-3 \Leftrightarrow -1\le\alpha-3\le0$, άρα $|\alpha-3|=3-\alpha$.

Είναι $-2\le\beta\le-1 \Leftrightarrow -2+2\le\beta+2\le-1+2 \Leftrightarrow 0\le\beta+2\le1$ άρα $|\beta+2|=\beta+2$.

β) Είναι $2\le\alpha\le3$ και $-2\le\beta\le-1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $0\le\alpha+\beta\le2$.

γ) Επειδή $\alpha+\beta\ge0$, $\alpha-3\le0$ και $\beta+2\ge0$, είναι:

$|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|=\alpha+\beta+3-\alpha-\beta-2=1$

4^{ο} Θέμα

1427. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

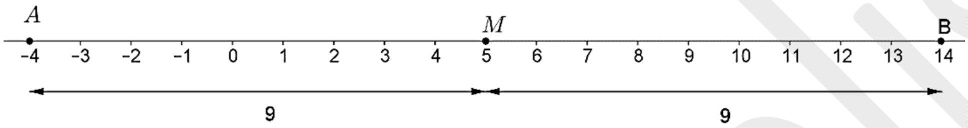
δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β)



Ο ζητούμενος αριθμός είναι οποιοσδήποτε αριθμός είναι σημείο του ΑΒ ([-4,14])

γ) $|x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow -9+5 \le x \le 9+5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 14$

δ) Επειδή $-4 \le x \le 14$ είναι $x+4 \ge 0 \Leftrightarrow |x+4| = x+4$ και $x-14 \le 0 \Leftrightarrow |x-14| = -x+14$

Επομένως $|x+4|+|x-14| = \cancel{x}+4-\cancel{x}+14 = 18$

1428. Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

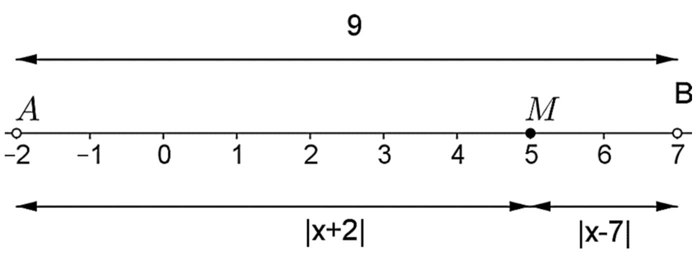
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $|x+2| = d(x,-2)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το -2.

ii) $|x-7| = d(x,7)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 7.

β)



γ) Παριστάνει το άθροισμα των αποστάσεων του πραγματικού αριθμού x από το -2 και από το 7,δηλαδή αν Μ, Γ,Δ οι εικόνες των x,-2,7 στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε $(ΜΓ)+(ΜΔ)=(ΓΔ)=|7-(-2)|=9$

δ) Είναι $-2<x<7$, επομένως $x+2>0 \Leftrightarrow |x+2|=x+2$ και $x-7<0 \Leftrightarrow |x-7|=-x+7$.

Άρα $A=\cancel{x}+2\cancel{-x}+7=9$

1429. Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$. (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $|x-5|=d(x,5)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 5 και το $|x-9|=d(x,9)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 9.

β) i) το M ισαπέχει από τα σημεία A και B όπου A η εικόνα του 5 και B η εικόνα του 9 και βρίσκεται στον άξονα x΄x. Άρα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB δηλαδή ο αριθμός 7.

ii) $|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow x-5=x-9 \Leftrightarrow 0\cdot x=-4$ Αδύνατη ή $x-5=-(x-9) \Leftrightarrow x-5=-x+9 \Leftrightarrow 2x=14 \Leftrightarrow x=7$

$x-5=-(x-9) \Leftrightarrow x-5=-x+9 \Leftrightarrow 2x=14 \Leftrightarrow x=7$

1515. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, οι αριθμοί $\alpha-1$, $1-\beta$ είναι ομόσημοι.

Αν $\alpha-1>0 \Leftrightarrow \alpha>1$ και $1-\beta>0 \Leftrightarrow \beta<1$, τότε $\beta<1<\alpha$.

Αν $\alpha-1<0 \Leftrightarrow \alpha<1$ και $1-\beta<0 \Leftrightarrow \beta>1$, τότε $\alpha<1<\beta$.

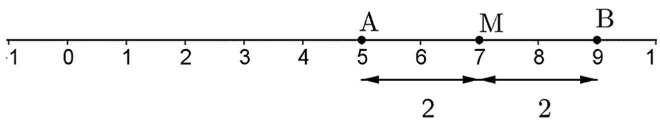
Άρα πάντοτε το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν $\alpha<1<\beta$ έχουμε $|\beta-\alpha|=\beta-\alpha=4$ ($\beta>\alpha$) και $K=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha=4$ ($\alpha-1<0, 1-\beta<0$)

Αν $\beta<1<\alpha$ έχουμε $|\beta-\alpha|=-\beta+\alpha=4$ ($\alpha>\beta$)

και

$K=\alpha-1+1-\beta=-\beta+\alpha=4$ $(\alpha-1>0, 1-\beta>0)$



1525. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β∈ R ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$ (1)

β) $|\beta-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\beta-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le\beta\le 5 \Leftrightarrow \beta\in[1,5]$

γ) Είναι $1<\alpha<3 \Leftrightarrow 2<2\alpha<6\ (2)$ και $1\le\beta\le 5 \Leftrightarrow -3\ge -3\beta\ge -15 \Leftrightarrow -15\le -3\beta\le -3\ (3)$.
Με πρόσθεση των (2) και (3) έχουμε $-13<2\alpha-3\beta<3$.

δ) Είναι $1<\alpha<3\ (1)$ και $1\le\beta\le 5 \Leftrightarrow 1\ge\frac{1}{\beta}\ge\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\le\frac{1}{\beta}\le 1\ (4)$

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (4) έχουμε $\frac{1}{5}<\alpha\cdot\frac{1}{\beta}<3 \Leftrightarrow \frac{1}{5}<\frac{\alpha}{\beta}<3$

13179.Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$,

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. **(Μονάδες 7)**

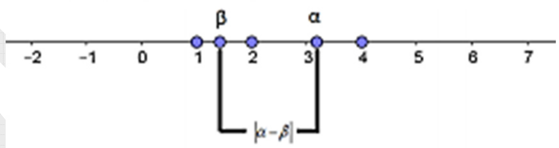
ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. **(Μονάδες 7)**

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$. **(Μονάδες 5)**

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) i. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η απόσταση των α, β γίνεται μέγιστη όταν το β είναι το 1 και το α το 4, οπότε η μέγιστη απόσταση τους είναι ίση με 3, άρα $d(\alpha,\beta)\le 3$.



ii. Είναι $2\le\alpha\le 4\ (1)$ και $1\le\beta\le 2 \Leftrightarrow -1\ge -\beta\ge -2 \Leftrightarrow -2\le -\beta\le -1\ (2)$
Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $0\le\alpha-\beta\le 3$
Είναι $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$, άρα $d(\alpha,\beta)\le 3$.

β) i. Είναι $1\le\beta\le 2\ (3)$ και $2\le\alpha\le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ge\frac{1}{\alpha}\ge\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\frac{1}{\alpha}\le\frac{1}{2}\ (4)$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3), (4) προκύπτει ότι $\frac{1}{2}\le\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\le 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}\le 1$

Είναι $2\le\alpha\le 4\ (5)$ και $1\le\beta\le 2 \Leftrightarrow 1\ge\frac{1}{\beta}\ge\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1}{\beta}\le 1\ (6)$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (5), (6) προκύπτει ότι $1\le\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\le 4 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\ge 1$

ii. Είναι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1 \Leftrightarrow 0\le 1-\frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha}{\beta}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-1\ge 0$, οπότε

$$\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right| \Leftrightarrow 1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}-1 \overset{\cdot\alpha\beta}{\Leftrightarrow} \alpha\beta-\cancel{\alpha}\beta\frac{\beta}{\cancel{\alpha}}=\alpha\cancel{\beta}\frac{\alpha}{\cancel{\beta}}-\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\alpha\beta \Leftrightarrow 0=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$
Όμως $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$, οπότε η ισότητα $\alpha=\beta$ ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=2$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

1270. Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση Κ σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Πρέπει $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ και $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$.Άρα για $x\neq -2,3$ η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Όταν $-2<x<3$,είναι $x+2>0\Leftrightarrow |x+2|=x+2$ και $x-3<0\Leftrightarrow |x-3|=-x+3=-(x-3)$

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}\Leftrightarrow$$

$$K=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}}+\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}=1+1=2$$

1281. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ **και** $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$. **(Μονάδες 13)**

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $A+B+\Gamma=\left(\sqrt{2}\right)^6+\left(\sqrt[3]{3}\right)^6+\left(\sqrt[6]{6}\right)^6=2^3+3^2+6=8+9+6=23$

β) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[6]{6}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3}\right)^6>\left(\sqrt[6]{6}\right)^6\Leftrightarrow 3^2>6\Leftrightarrow 9>6$ ισχύει

1335. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ **και** $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ **όπου x πραγματικός αριθμός.**

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; **(Μονάδες 7)**

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; **(Μονάδες 8)**

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει $A=B$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $A=|x-2|$ και ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Πρέπει $(2-x)^3\geq 0\Leftrightarrow 2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$

γ) Για $x\leq 2$ είναι $A=2-x$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}=|2-x|=2-x$. Άρα $A=B$.

1338. **Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:**

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$. **(Μονάδες 15)**

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{5^2\cdot3^3\cdot5}=\sqrt[6]{5^3\cdot3^3}=\sqrt[\cancel{6}]{15^{\cancel{3}}}=\sqrt{15}$

β) $\sqrt[3]{5}<3\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{5}\right)^3<3^3\Leftrightarrow 5<27$ ισχύει. Άρα $A<B$.

1340. **Αν είναι $A=2-\sqrt{3},\ B=2+\sqrt{3}$, τότε:**

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. **(Μονάδες 12)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $A\cdot B=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

β) $A+B=2\cancel{-\sqrt{3}}+2\cancel{+\sqrt{3}}=2+2=4$ και $\Pi=A^2+B^2=(A+B)^2-2A\cdot B=4^2-2\cdot1=16-2=14$

1375. **Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):**

$\sqrt{2}\cong 1{,}41$, $\sqrt{3}\cong 1{,}73$, $\sqrt{5}\cong 2{,}24$ και $\sqrt{7}\cong 2{,}64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20},\sqrt{40},\sqrt{80}$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot5}=2\sqrt{5}\cong2\cdot2{,}24=4{,}48$

$\sqrt{40}=\sqrt{2^2\cdot2\cdot5}=2\sqrt{2}\sqrt{5}\cong2\cdot1{,}41\cdot2{,}24=6{,}37$

$\sqrt{80}=\sqrt{4^2\cdot5}=4\sqrt{5}\cong4\cdot2{,}24=8{,}96$

β) $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{\sqrt{3^2\cdot5}-\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{10\cancel{\sqrt{5}}}{2\cancel{\sqrt{5}}}=5$

1376. **Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$**

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Πρέπει $x-4\ge0\Leftrightarrow x\ge4$ και $x+1\ge0\Leftrightarrow x\ge-1$. Άρα η παράσταση Α ορίζεται για $x\ge4$

β) $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x-4-(x+1)=\cancel{x}-4\cancel{-x}-1=-5$

1377. α) Να δείξετε ότι : $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ **(Μονάδες 12)**

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6-\sqrt[3]{30}$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64$ ισχύει

β) $\sqrt[3]{30} > 6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} > 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 > 3^3 \Leftrightarrow 30 > 27$ ισχύει . Άρα $\sqrt[3]{30} > 6-\sqrt[3]{30}$

1378. Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 13)**

β) Για $x=5$,να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Πρέπει $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$ και $6-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 6$. Άρα η παράσταση Α ορίζεται για $4\le x\le 6$

β) Για $x=5$ είναι: $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$. Άρα $A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$

1379. Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 13)**

β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Πρέπει $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$ και $x^2+4\ge 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα η παράσταση Α ορίζεται για $x\ge 4$, δηλαδή $x\in[4,+\infty)$.

β) Για $x=4$: $A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}-0=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$

Άρα $A^2-A=\left(2\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}=20-2\sqrt{5}=2(10-\sqrt{5})$

1380. Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 13)**

β) Για $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}=\sqrt{1-x}-|x|$. Πρέπει $1-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$, άρα η Α ορίζεται για $x\in(-\infty,1]$.

β) Για $x=-3$ είναι: $A=\sqrt{1-(-3)}-|-3|=\sqrt{4}-3=2-3=-1$

Άρα $A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=\cancel{-1}\cancel{+1}\cancel{-1}\cancel{+1}=0$

1381. Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2,+\infty)$

β) Για $x=4$ είναι $B=\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$ και $B^2+6B=2^2+6\cdot 2=4+12=16=2^4=B^4$

1382. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) $A-B=\left(\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=2^3-2^2=8-4=4$

β) $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2} \Leftrightarrow 1^6<\left(\sqrt[3]{2}\right)^6<\left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow 1<2^2<2^3 \Leftrightarrow 1<4<8$ ισχύει.

12943.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα α + β και το γινόμενο αβ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

$\alpha\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{4}\left(3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{1}{4}\cdot 4=1$

β) $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(9+6\sqrt{5}+5\right)+\frac{1}{4}\left(9-6\sqrt{5}+5\right)=\frac{1}{4}\left(14+6\sqrt{5}\right)+\frac{1}{4}\left(14-6\sqrt{5}\right)=$

$\frac{1}{4}\left(14+\cancel{6\sqrt{5}}+14-\cancel{6\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{4}\cdot 28=7$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις 1ου βαθμού

2ο Θέμα

1246. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $\lambda=1$: $(1^2-1)\cdot x=(1+1)(1+2)\Leftrightarrow 0\cdot x=6$ αδύνατη

Για $\lambda=-1$: $((-1)^2-1)\cdot x=(-1+1)(-1+2)\Leftrightarrow 0\cdot x=0$ αόριστη ή ταυτότητα

β) Όταν $\lambda^2-1\neq 0\Leftrightarrow \lambda^2\neq 1\Leftrightarrow \lambda\neq\pm 1$ έχει μοναδική λύση

1327. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$. (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha=-3$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

Λύση

$(\alpha+3)x=\alpha^2-9$ (1)

α) i) Για $\alpha=1$ από την (1) έχουμε $4x=1^2-9\Leftrightarrow 4x=-8\Leftrightarrow x=-\frac{8}{4}\Leftrightarrow x=-2$

ii) Για $\alpha=-3$ από την (1) έχουμε $0\cdot x=(-3)^2-9\Leftrightarrow 0\cdot x=-8$ Αδύνατη

β) Έχει μοναδική λύση όταν $\alpha+3\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq -3$ την $x=\frac{\alpha^2-9}{\alpha+3}=\frac{(\alpha-3)\cancel{(\alpha+3)}}{\cancel{\alpha+3}}=\alpha-3$

1351. Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες9)

Λύση

α) $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1\Leftrightarrow \lambda\cdot x-x=\lambda^2-1\Leftrightarrow (\lambda-1)\cdot x=(\lambda-1)(\lambda+1)$

β) Πρέπει $\lambda-1\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 1$. Τότε έχει τη μοναδική λύση $x=\frac{\cancel{(\lambda-1)}(\lambda+1)}{\cancel{\lambda-1}}=\lambda+1$

γ) Πρέπει $\lambda=1$. Πράγματι για $\lambda=1$ έχουμε $0\cdot x=0$.

1369. Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-9\right)x=\lambda^2-3\lambda$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. **(Μονάδες 6)**

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) (1) για $\lambda=0\Rightarrow(0^2-9)x=0^2-3\cdot0\Leftrightarrow-9x=0$

(1) για $\lambda=1\Rightarrow(1^2-9)x=1^2-3\cdot1\Leftrightarrow-8x=-2$

(1) για $\lambda=4\Rightarrow(4^2-9)x=4^2-3\cdot4\Leftrightarrow7x=4$

β) Έχει μοναδική λύση όταν

$\lambda^2-9\neq0\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq0\Leftrightarrow\lambda-3\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq3$ και $\lambda+3\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-3$

την $x=\dfrac{\lambda^2-3\lambda}{\lambda^2-9}=\dfrac{\lambda\cancel{(\lambda-3)}}{\cancel{(\lambda-3)}(\lambda+3)}=\dfrac{\lambda}{\lambda+3}$

γ) $4=\dfrac{\lambda}{\lambda+3}\Leftrightarrow4(\lambda+3)=\lambda\Leftrightarrow4\lambda+12=\lambda\Leftrightarrow4\lambda-\lambda=-12\Leftrightarrow3\lambda=-12\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{-12}{3}=-4$

Εξισώσεις με απόλυτα

1303. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. **(Μονάδες 16)**

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Έστω $2\le x<3$, τότε $x-2\ge0\Leftrightarrow2(x-2)\ge0\Leftrightarrow2x-4\ge0$ και $|2x-4|=2x-4$

Επίσης $x-3<0\Rightarrow|x-3|=-x+3$. Επομένως $A+B=2x-4-x+3=x-1$

β) Αν υπάρχει θα πρέπει $2=x-1\Leftrightarrow x=3\notin[2,3)$, άρα δεν υπάρχει.

1308. Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. **(Μονάδες 12)**

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}\Leftrightarrow$

$A=\dfrac{\cancel{\sqrt{15}}+\sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2-\cancel{\sqrt{15}}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\dfrac{3+5}{5-3}=\dfrac{8}{2}=4$

β) $|x+4|=1\Leftrightarrow x+4=1\Leftrightarrow x=-3$ ή $x+4=-1\Leftrightarrow x=-5$

13169. **Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \le x \le 5$, τότε:**

α) Να αποδείξετε ότι $x-5 \le 0 < x-2$. **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Είναι $x \le 5 \Leftrightarrow x-5 \le 0$ και $x \ge 3 \Leftrightarrow x-2 \ge 1 > 0$.

β) Επειδή $x-5 \le 0 < x-2$, η εξίσωση γίνεται: $x-2-(-x+5)=2 \Leftrightarrow x-2+x-5=2 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

Επειδή $x=\frac{9}{2}=4{,}5$ και $3 \le 4{,}5 \le 5$, η λύση είναι δεκτή.

12917. **Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$ (1) με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.**

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για α = 0 και α = 5. **(Μονάδες 8)**

β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$. **(Μονάδες 8)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β)i. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Για $\alpha=0$ η εξίσωση γίνεται $(|0-1|-3)x=0+2 \Leftrightarrow (1-3)x=2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

Για $\alpha=5$ η εξίσωση γίνεται $(|5-1|-3)x=5+2 \Leftrightarrow (4-3)x=7 \Leftrightarrow x=7$

β) i. $|\alpha-1|=3 \Leftrightarrow \alpha-1=\pm 3 \Leftrightarrow (\alpha-1=3 \Leftrightarrow \alpha=4)$ ή $(\alpha-1=-3 \Leftrightarrow \alpha=-2)$

ii. Για $\alpha=4$ η εξίσωση γίνεται $(|4-1|-3)x=4+2 \Leftrightarrow (3-3)x=6 \Leftrightarrow 0\cdot x=6$ αδύνατη και

για $\alpha=-2$ η εξίσωση γίνεται $(|-2-1|-3)x=-2+2 \Leftrightarrow (3-3)x=0 \Leftrightarrow 0\cdot x=0$ ταυτότητα.

Εξισώσεις 2ου βαθμού

2ο Θέμα

1238. **α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$.** **(Μονάδες 15)**

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$. **(Μονάδες 10)**

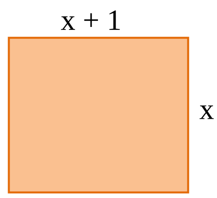
Λύση

α) $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{(:(-2))}{\Leftrightarrow} x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

β) Πρέπει $x-2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 2$

$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow x=2$ απορρίπτεται ή **x = 3**

1285. **Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.**



α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. **(Μονάδες 10)**

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = x + x + (x+1) + (x+1) = 4x + 2$ m.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x(x+1) = x^2 + x \ m^2$.

β) $E = 90 \Leftrightarrow x^2 + x = 90 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361$

και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \dfrac{-1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow x_1 = 9$ και $x_2 = -10$ απορρίπτεται αφού $x > 0$

Επομένως οι διαστάσεις του εργαστηρίου είναι 9 m και 10 m.

1290. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1 , να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 13)**

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Το 1 επαληθεύει την εξίσωση. Άρα $1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$

β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - x + 6 = 0$.

Επειδή $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$, δεν έχει πραγματικές λύσεις.

1312. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Το -2 επαληθεύει την εξίσωση.

Άρα $\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1) \cdot (-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

β) Για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα:

$\Delta = \left[-(\lambda - 1)^2\right] - 4 \cdot \lambda(-1) = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \geq 0$

Άρα έχει πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \neq 0$.

1349.α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $2x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

β) Είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ οπότε η εξίσωση γίνεται: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$

13028.Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 2 = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3. **(Μονάδες 10)**

β) Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1). **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Η (1) έχει ρίζα το 3, αν και μόνο αν $\alpha \cdot 3^2 - 2\alpha \cdot 3 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6\alpha - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

β) Για α=2 η εξίσωση γίνεται $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ και ρίζες

$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι x = 3 ή x = -1.

4ο Θέμα

1388. Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 1ου βαθμού όταν $8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$.

Τότε η εξίσωση γίνεται: $-2(8-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow -12x + 1 = 0$

β) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού όταν $8 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 8$. Τότε έχει διακρίνουσα:

$\Delta = [-2(\lambda-2)]^2 - 4 \cdot (8-\lambda) \cdot 1 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς λ με $\Delta' = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$ και ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -1$

Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γίνεται: $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται: $9x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

γ) Για $\lambda = 4$ το τριώνυμο γίνεται: $(8-4)x^2 - 2(4-2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$

και για $\lambda = -1$ το τριώνυμο γίνεται $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0$.

1412. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για να είναι εξίσωση 2ου βαθμού θα πρέπει $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

β) $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right)\cdot x+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\cdot x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)\cdot x+(\lambda-1)=0 \overset{:(\lambda-1)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda\cdot x^2-(\lambda+1)\cdot x+1=0$

γ) $\Delta=\left[-(\lambda+1)^2\right]-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2>0 \quad (\lambda\neq 1)$

Άρα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) $x_1=\dfrac{\lambda\cancel{+1}+\lambda\cancel{-1}}{2\lambda}=\dfrac{2\lambda}{2\lambda}=1$ και $x_2=\dfrac{\cancel{\lambda}+1\cancel{-\lambda}+1}{2\lambda}=\dfrac{2}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}$

1440. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, με $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $\lambda>0$ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του $\lambda>0$ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

Λύση

α) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Από τους τύπους Vietta έχουμε:

$S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$. Επειδή το γινόμενο είναι θετικός αριθμός και το άθροισμα θετικός αριθμό ($\lambda^2+1>0$ και $\lambda>0$) το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

β) i) $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$

ii) $\Pi\geq 4\Leftrightarrow 2\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\geq 4 \overset{(\cdot\lambda>0)}{\Leftrightarrow} 2\lambda^2+2\geq 4\lambda \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} \lambda^2+1\geq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1\geq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\geq 0$ ισχύει

iii) $\Pi=4\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$

Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, Οι ρίζες του είναι $x_1=x_2=1$

Στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

1459. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\lambda=\left[2(-5)+5\right]^2-8(-5)=(-5)^2+40=25+40=65$

β) $\lambda = 20 \Leftrightarrow (2x+5)^2 - 8x = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 25 - 8x = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4\cdot4\cdot5 = 144 - 80 = 64$ άρα $x = \dfrac{-12+8}{8} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$ ή $x = \dfrac{-12-8}{8} = -\dfrac{20}{8} = -\dfrac{5}{2}$

γ) $\lambda = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 25 - \lambda = 0$ (2)

i) Για $\lambda = 5$ η (2) γίνεται: $4x^2 + 12x + 20 = 0 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow} x^2 + 3x + 5 = 0$ με
$\Delta = 3^2 - 4\cdot1\cdot5 = 9 - 20 = -11 < 0$ Άρα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για να είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ίσος με 5.

ii) Για να έχει πραγματικές ρίζες η (2) θα πρέπει

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4\cdot4\cdot(25-\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \ge 0 \Leftrightarrow 16\lambda \ge 256 \Leftrightarrow \lambda \ge \dfrac{256}{16} \Leftrightarrow \lambda \ge 16$

1476. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. **(Μονάδες 8)**
β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.
i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$. **(Μονάδες 7)**
ii) Να δείξετε ότι: $\rho \ne 0$ και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$.
(Μονάδες 4+6=10)

Λύση

α) $\Delta = \lambda^2 - 4\cdot2\cdot(-36) = \lambda^2 + 288 > 0$. Άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) Θα πρέπει ο αριθμός $-\rho$ να την επαληθεύει ,δηλαδή : $2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$
που ισχύει αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (1)

ii) Αν $\rho = 0$,τότε αφού είναι ρίζα της (1) θα πρέπει $2\cdot0^2 + \lambda\cdot0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0$ άτοπο. Άρα $\rho \ne 0$

Για να είναι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\cdot\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\cdot\frac{1}{\rho^2} + \lambda\cdot\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \overset{(\cdot\rho^2)}{\Leftrightarrow} -36 + \lambda\cdot\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\cdot\rho - 36 = 0$$

το οποίο ισχύει αφού το ρ είναι ρίζα της (1).

1516. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2). **(Μονάδες 10)**
β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha\cdot\gamma \ne 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma \ne 0$, τότε:
i) $\rho \ne 0$ και **(Μονάδες 5)**
ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4\cdot8\cdot3 = 196 - 96 = 100$ και οι ρίζες της είναι:

$x_1 = \dfrac{14+10}{2\cdot3} = \dfrac{24}{6} = 4$ και $x_2 = \dfrac{14-10}{2\cdot3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Η εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-14)^2 - 4\cdot 3\cdot 8 = 196 - 96 = 100$ και οι ρίζες της είναι : $x_1 = \frac{14+10}{2\cdot 8} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ και

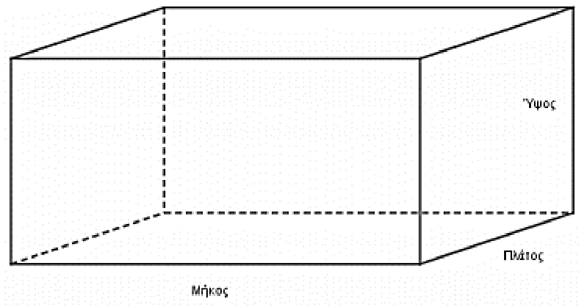
$x_2 = \frac{14-10}{2\cdot 8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

β) i) Αν $\rho = 0$,τότε αφού είναι ρίζα της εξίσωσης (3) την επαληθεύει.

Επομένως $\alpha\cdot 0^2 + \beta\cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ άτοπο αφού $\alpha\cdot\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Για να την επαληθεύει θα πρέπει $\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\cdot\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma\cdot\frac{1}{\rho^2} + \beta\cdot\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \overset{(\cdot\rho^2)}{\Leftrightarrow} \gamma + \beta\cdot\rho + \alpha\rho^2 = 0$

το οποίο ισχύει αφού ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3).



12683.Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$. (Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Έστω x m το μήκος της δεξαμενής. Επειδή η βάση της είναι τετράγωνο τότε και το πλάτος θα είναι x m.

Επειδή το ύψος της είναι ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της, το ύψος είναι $\frac{x}{4}m$.

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεων της, οπότε ο όγκος της είναι $V = x\cdot x\cdot\frac{x}{4} = \frac{x^3}{4}m^3$.

Επειδή η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, ισχύει ότι $\frac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4m$

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος ίσα με 4m και ύψος ίσο με 1 m.

β) Έστω x m το μήκος της δεξαμενής τότε το πλάτος της θα είναι $(x-2)m$ και ο όγκος της θα είναι $V = x\cdot(x-2)\cdot 2 = (2x^2 - 4x)m^3$.

Είναι $2x^2 - 4x = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 36$ και ρίζες $x_1 = \frac{2+\sqrt{36}}{2} = 4$,

$x_2 = \frac{2-\sqrt{36}}{2} = -2$ που απορρίπτεται αφού x > 0.

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ) Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του πετρελαίου θα είναι: $V = 4\cdot 2\cdot x = 8x\ m^3$.

Είναι $8x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}m$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4}m$

13320.Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\ (\mathrm{I})$ και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0\ (\mathrm{II})$ όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (Ι) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ). (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (Ι), (ΙΙ) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Ας είναι Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων (Ι) και (ΙΙ) αντίστοιχα. Τότε $\Delta_1 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και $\Delta_2 = \beta^2 - 4\gamma\alpha$. Είναι $\Delta_1 = \Delta_2$, που σημαίνει ότι οι εξισώσεις (Ι) και (ΙΙ) ή θα έχουν δύο διαφορετικές λύσεις η κάθε μία αν $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$, ή θα είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$ αν $\Delta_1 = \Delta_2 < 0$ ή θα έχουν από μία διπλή ρίζα η κάθε μία, αν $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (Ι) θα ισχύει ότι $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0\ (1)$.

Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) πρέπει

$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma + \beta\gamma + \alpha\rho^2 = 0$ που ισχύει από την (1).

γ) Το $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της (Ι) όταν

$$\alpha\left(\sqrt{2}\right)^2 + \beta\sqrt{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta\sqrt{2} = -2\alpha - \gamma \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{2} = \frac{-2\alpha - \gamma}{\beta} \quad (3)$$

Επειδή οι α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, το πηλίκο $\frac{-2\alpha - \gamma}{\beta}$ είναι πηλίκο ακεραίων οπότε είναι ρητός αριθμός. Όμως το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, οπότε η (3) είναι αδύνατη.

Το $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) όταν

$$\gamma\left(\sqrt{2}\right)^2 + \beta\sqrt{2} + \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\gamma + \beta\sqrt{2} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \beta\sqrt{2} = -2\gamma - \alpha \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{2} = \frac{-2\gamma - \alpha}{\beta} \quad (4)$$

Επειδή οι α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, το πηλίκο $\frac{-2\gamma - \alpha}{\beta}$ είναι πηλίκο ακεραίων οπότε είναι ρητός αριθμός. Όμως το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, οπότε η (4) είναι αδύνατη.

Επομένως καμία από τις εξισώσεις (Ι), (ΙΙ) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

$2^{ο}$ Θέμα

1332.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi=\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. **(Μονάδες 10)**

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Πρέπει $x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 1$ και $1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.
άρα έχει νόημα για $x\neq 0$ και $x\neq 1$

β) $\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}=0 \overset{\cdot x(x-1)}{\Leftrightarrow} 2x^2-1-x=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται
ή $x=-\frac{1}{2}$ δεκτή .

$4^{ο}$ Θέμα

1445.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-7x^2+12=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 10)**

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $x^4-7x^2+12=0\,(1)$. Αν στην εξίσωση (1) θέσουμε $\alpha=x^2$ (2) προκύπτει η εξίσωση $\alpha^2-7\alpha+12=0$ με ρίζες τους αριθμούς 3,4. Από την (2)$\Rightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ ή $x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Άρα η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) $x^4+\beta x^2+\gamma=0\,(1)$ Θέτουμε $\omega=x^2$ (2). Τότε η εξίσωση (1) γίνεται $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ (3) με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma>0$.Επομένως έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Επίσης από τις σχέσεις Vieta είναι $S=\omega_1+\omega_2=-\beta>0$ και $P=\omega_1\cdot\omega_2=\gamma>0$. (ω_1,ω_2 οι ρίζες της (3)). Άρα η (3) έχει δύο θετικές ρίζες. Οπότε από την (2) $\Rightarrow x^2=\omega_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1}$ ή $x^2=\omega_2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_2}$. Άρα η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

1448. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$. **(Μονάδες 5)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-5)^2 - 4\cdot\alpha\cdot\alpha \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 \leq 25 \Leftrightarrow 2|\alpha| \leq 5 \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$. Από τις σχέσεις Vieta:

$P = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.Άρα έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Όταν $\alpha = 2$ έχουμε την εξίσωση : $2x^2 - 5x + 2 = 0$ με $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$ και

$x_1 = \frac{5+3}{2\cdot 2} = \frac{8}{4} = 2,\ x_2 = \frac{5-3}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

γ) Θέτουμε $\omega = x + \frac{1}{x}$ (1) .Οπότε προκύπτει η εξίσωση $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$,η οποία από το ερώτημα (β) έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $\frac{1}{2}$.

$(1) \overset{x=2}{\Rightarrow} x + \frac{1}{x} = 2 \overset{(\cdot x)}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$(1) \overset{x=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \overset{(\cdot 2x)}{\Leftrightarrow} 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$ (2) . Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$. Επομένως η εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές λύσεις. Άρα η εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

1477.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (1) . Αν στην εξίσωση (1) θέσουμε $\alpha = x^2$ προκύπτει η εξίσωση $\alpha^2 - 8\alpha - 9 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς -1,9. Τότε $x^2 = -1$ αδύνατη ή $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$, άρα η (1) έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες .

β) $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (2). Αν στην εξίσωση (2) θέσουμε $\omega = x^2$ (3), προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 + \beta\cdot\omega + \gamma = 0$ (3)

i) Η (3) έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ και επειδή $\beta^2 \geq 0$, $\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0$ είναι και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii) Επειδή $\Delta > 0$ η (3) έχει δύο ρίζες ω_1, ω_2 πραγματικές και άνισες. Από τις σχέσεις Vieta έχουμε : $P = \omega_1\cdot\omega_2 = \gamma < 0$. Άρα η (3) έχει δύο ετερόσημες ρίζες. Έστω ω_1 η θετική ρίζα και ω_2 η αρνητική ρίζα. Από την (2) $\Rightarrow x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$ ή $x^2 = \omega_2 < 0$ αδύνατη. Άρα η (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες . Όμοια αν $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$.

1482.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-9x^2+20=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 10)**

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4+\beta x^2+\gamma=0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $x^4-9x^2+20=0$ (1). Αν στην εξίσωση (1) θέσουμε $\alpha=x^2$ προκύπτει η εξίσωση $\alpha^2-9\alpha+20=0$ με ρίζες τους αριθμούς 4,5. Τότε $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ ή $x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Άρα η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες

β) Θέτουμε $x^2=\omega>0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ (2). Για να έχει η διτετράγωνη εξίσωση δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, πρέπει η (2) να έχει μία θετική ρίζα ρ, έτσι ώστε $x^2=\rho \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\rho}$ θα είναι οι ρίζες της διτετράγωνης εξίσωσης. Τότε όμως η (2) θα γράφεται $(\omega-\rho)^2=0 \Leftrightarrow (x^2-\rho)^2=0 \Leftrightarrow x^4-2\rho x^2+\rho^2=0$. Άρα αντικαθιστώντας στη θέση του ρ στη τελευταία εξίσωση έναν θετικό αριθμό έχουμε μια διτετράγωνη που ικανοποιεί την εκφώνηση. Για $\rho=4$ είναι: $x^4-8x^2+16=0 \Leftrightarrow (x^2-4)^2=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ (2). Άρα η (2) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες .

Τύποι Vieta

2ο Θέμα

1262. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ **(Μονάδες 8)**

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ **(Μονάδες 8)**

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) i) $A+B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}+\dfrac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \Leftrightarrow$

$$A+B=\frac{5\cancel{-\sqrt{5}}+5\cancel{+\sqrt{5}}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{10}{5^2-\sqrt{5}^2}=\frac{10}{25-5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\dfrac{1}{5^2-\sqrt{5}^2}=\dfrac{1}{25-5}=\dfrac{1}{20}$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S=A+B=\dfrac{1}{2}$, γινόμενο ριζών $P=A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ και

είναι η $x^2-\dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{1}{20}=0 \overset{(\cdot 20)}{\Leftrightarrow} 20x^2-10x+1=0$

1269. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1+x_2, x_1\cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot(-1)=25+8=33>0$, άρα έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Από τις σχέσεις Vieta : $S=x_1+x_2=-\frac{5}{2}$, $P=x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$ και

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1\cdot x_2}+\frac{x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{5}{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{2}}}=5$$

γ) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι $S'=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$ και το γινόμενο των

ριζών της είναι $P'=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-5x-2=0$

1280. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=2$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha+\beta=2\,(1)$. $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta(\alpha+\beta)=-30\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\alpha\cdot\beta\cdot2=-30\overset{(:2)}{\Leftrightarrow}\alpha\cdot\beta=-15$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S=\alpha+\beta=2$, γινόμενο ριζών $P=\alpha\cdot\beta=-15$ και είναι η $x^2-2x-15=0$. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=64=8^2$ και ρίζες $x_1=\frac{2+8}{2}=5$ και $x_2=\frac{2-8}{2}=-3$, άρα $a=5$ και $\beta=-3$ ή $\alpha=-3$ και $\beta=5$.

1288. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\kappa x-2$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\kappa x-2=0$ (1) , τότε:

i) να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών της (1). (Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1,ρ_2 , όπου $\rho_1=2x_1$ και $\rho_2=2x_2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\Delta=\kappa^2-4\cdot1\cdot(-2)=\kappa^2+8>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) i) Από τους τύπους Vieta είναι $S=x_1+x_2=-\frac{-\kappa}{1}=\kappa$ και $P=x_1\cdot x_2=\frac{-2}{1}=-2$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S' = \rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\kappa$ και γινόμενο ριζών $P' = \rho_1 \cdot \rho_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4(-2) = -8$

Η εξίσωση είναι η $x^2 - S'x + P' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\kappa x - 8 = 0$.

1315. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha \cdot \beta = 4\ (1)$. $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta(\alpha + \beta) = 20 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4(\alpha + \beta) = 20 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 5$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 5$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = 4$ και είναι η $x^2 - 5x + 4 = 0$. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 = 3^2$ και ρίζες

$x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$ και $x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$, άρα $\alpha = 4$ και $\beta = 1$ ή $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

1316. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha + \beta = -1\ (1)$. $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Leftrightarrow$

$\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha + \beta)^2 = -30 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \beta \cdot (-1)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = -12$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = -1$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = -12$ και είναι η $x^2 + x - 12 = 0$. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 = 7^2$ $\beta = -4$ και ρίζες

$x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$, άρα $\alpha = 3$ και ή $\alpha = -4$ και $\beta = 3$.

1334. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -\,64$. (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 7)

Λύση

α) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{12^2 - 272}{2} = \frac{144 - 272}{2} = \frac{-128}{2} = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 12$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = -64$ και είναι η $x^2 - 12x - 64 = 0\ (1)$.

γ) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-64)=400=20^2$ και ρίζες $x_1=\frac{12+20}{2}=16$ και $x_2=\frac{12-20}{2}=-4$. Οι α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) άρα $\alpha=16$ και $\beta=-4$ ή $\alpha=-4$ και $\beta=16$.

1337. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\frac{1}{2}$. **(Μονάδες 12)**

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A,B . **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i) $A+B=\frac{1}{3-\sqrt{7}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}+\frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}\Leftrightarrow$

$A+B=\frac{3\cancel{-\sqrt{7}}+3\cancel{+\sqrt{7}}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\frac{6}{3^2-\sqrt{7}^2}=\frac{6}{9-7}=\frac{6}{2}=3$

ii) $A\cdot B=\frac{1}{3-\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{1}{3^2-\sqrt{7}^2}=\frac{1}{9-7}=\frac{1}{2}$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S=A+B=3$, γινόμενο ριζών $P=A\cdot B=\frac{1}{2}$ και είναι η $x^2-3x+\frac{1}{2}=0\overset{(\cdot2)}{\Leftrightarrow}2x^2-6x+1=0$.

1348. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\Delta=4\lambda^2-4\cdot4(\lambda-1)=4\lambda^2-16(\lambda-1)=4\lambda^2-16\lambda+16=(2\lambda-4)^2$

β) Είναι $\Delta=(2\lambda-4)^2\geq0$ άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $x_1+x_2=2\lambda$ και $x_1\cdot x_2=4(\lambda-1)=4\lambda-4$

Επομένως $x_1+x_2=x_1\cdot x_2\Leftrightarrow2\lambda=4\lambda-4\Leftrightarrow4\lambda-2\lambda=4\Leftrightarrow2\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=2$

1359.α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. **(Μονάδες 10)**

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α)ερωτήματος. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $|x-2|=\sqrt{3}\Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=2-\sqrt{3}$

β) Το άθροισμα των ριζών είναι $S=2\cancel{+\sqrt{3}}+2\cancel{-\sqrt{3}}=4$

Το γινόμενο των ριζών είναι: $P=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-4x+1=0$.

4ο Θέμα

1407. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$t_A<t_B$, $t_\Gamma=\dfrac{t_A+2t_B}{3}$ **και** $|t_A-t_\Delta| = |t_B-t_\Delta|$ $.t_\Delta=\dfrac{t_A+t_B}{2}$

α) i) Να δείξετε ότι . **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A+t_B=6$ και $t_A\cdot t_B=8$.

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B . **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) i) $|t_A-t_\Delta| = |t_B-t_\Delta| \Leftrightarrow t_A-\cancel{t_\Delta}=t_B-\cancel{t_\Delta} \Leftrightarrow t_A=t_B$ άτοπο ($t_A<t_B$)

ή $t_A-t_\Delta=-(t_B-t_\Delta) \Leftrightarrow t_A-t_\Delta=-t_B+t_\Delta \Leftrightarrow 2t_\Delta=t_A+t_B \Leftrightarrow t_\Delta=\dfrac{t_A+t_B}{2}$

ii) $t_A<t_\Delta \Leftrightarrow t_A<\dfrac{t_A+t_B}{2} \Leftrightarrow 2t_A<t_A+t_B \Leftrightarrow t_A<t_B$ ισχύει.

$t_\Delta<t_\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{t_A+t_B}{2}<\dfrac{t_A+2t_B}{3} \Leftrightarrow 3(t_A+t_B)<2(t_A+2t_B) \Leftrightarrow 3t_A+3t_B<2t_A+4t_B \Leftrightarrow t_A<t_B$ ισχύει.

Άρα $t_A<t_\Delta<t_\Gamma<t_B$

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S=t_A+t_B=6$, γινόμενο ριζών

$t_\Gamma<t_B \Leftrightarrow \dfrac{t_A+2t_B}{3}<t_B \Leftrightarrow t_A+2t_B<3t_B \Leftrightarrow t_A<t_B$ ισχύει $P=t_A\cdot t_B=8$ και είναι η $x^2-6x+8=0$.

ii) Οι χρόνοι τερματισμού των αθλητών Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης
$x^2-6x+8=0$ δηλαδή $t_A=2$ min και $t_B=4$ min ($t_A<t_B$). Ο χρόνος τερματισμού του αθλητή Γ είναι $t_\Gamma=\dfrac{t_A+2t_B}{3}=\dfrac{2+2\cdot 4}{3}=\dfrac{10}{3}=3\text{min}$ και 20sec

Ο χρόνος τερματισμού του αθλητή Δ είναι $t_\Delta=\dfrac{t_A+t_B}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3\text{min}$

1431. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. **(Μονάδες 10)**

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . **(Μονάδες 5)**

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4(2-\lambda^2)=16-8+4\lambda^2=8+4\lambda^2>0$ άρα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) $S = x_1 + x_2 = 4$

ii) $P = x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2$

γ) i) Αν $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ τότε : $x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

1439. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\Delta = \left[-(\lambda^2+1)\right]^2 - 4\lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) $S = x_1 + x_2 = \dfrac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) i) Επειδή το γινόμενο είναι θετικός αριθμός και το άθροισμα αρνητικός αριθμός ($\lambda^2 + 1 > 0$ και $\lambda < 0$) το τριώνυμο έχει ρίζες αρνητικές.

ii) $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^2+1}{-\lambda} \geq 2 \overset{\cdot(-\lambda)>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq -2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 \geq 0$

1451. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - \left(\lambda^2 + 5\right) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\left(x_1 - 2\right)\left(x_2 - 2\right) = -4$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot \left[-(\lambda^2 + 5)\right] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$

β) Είναι $\Delta = 5\lambda^2 + 20 > 0$ άρα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε : $S = x_1 + x_2 = \lambda$ και $P = x_1 \cdot x_2 = -(\lambda^2 + 5) = -\lambda^2 - 5$

$\left(x_1 - 2\right)\left(x_2 - 2\right) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 5 - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$-\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 3=16$, άρα $\lambda=\frac{2+4}{-2}=-3$ ή $\lambda=\frac{2-4}{-2}=1$

1452.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1) . **(Μονάδες 10)**

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). **(Μονάδες 7)**

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25$ άρα $x_1=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$, $x_2=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

β) i) Για να είναι αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) θα πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\frac{\alpha}{\beta}-4=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\frac{\alpha}{\beta}-4=0 \overset{(\cdot\beta^2)}{\Leftrightarrow} \alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0 \text{ ισχύει.}$$

ii) Αφού αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) θα πρέπει $\frac{\alpha}{\beta}=-1$ απορρίπτεται γιατί οι α, β είναι ομόσημοι ή $\frac{\alpha}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha=4\beta$. Άρα ο α είναι τετραπλάσιος του β.

1456. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 10)**

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; **(Μονάδες 6)**

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(1-2\lambda)^2\geq 0$.
Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Θα πρέπει $\Delta=0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2=0 \Leftrightarrow 1-2\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=1,\ P=x_1\cdot x_2=\lambda-\lambda^2$

$$d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=\frac{1}{|x_1-x_2|} \Leftrightarrow |x_1-x_2|^2=1 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=1 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1 \Leftrightarrow$$

$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1 \Leftrightarrow 1^2-4(\lambda-\lambda^2)=1 \Leftrightarrow \cancel{1}-4\lambda+4\lambda^2=\cancel{1} \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1$$

1460. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ (1) με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1+x_2|=4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma<4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2-\beta|x|+3=0$ (2) . Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=\beta$.Άρα : $|x_1+x_2|=4\Leftrightarrow|\beta|=4\Leftrightarrow\beta=\pm4$

β) Αφού έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες : $\Delta>0\Leftrightarrow\beta^2-4\gamma>0\Leftrightarrow4\gamma<\beta^2\overset{\beta=\pm4}{\Leftrightarrow}4\gamma<16\Leftrightarrow\gamma<4$

γ) Θέτουμε $|x|=\omega$ (3) . Από την $(2)\Rightarrow|x|^2-\beta|x|+3=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\omega^2-\beta\cdot\omega+3=0$ (4)

Για $\beta=4$ από (4) $\Rightarrow\omega^2-4\omega+3=0$. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=16-12=4$.

Άρα έχει ρίζες τις $\omega_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$, $\omega_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

(3) $\Rightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$.Άρα έχει πραγματικές ρίζες.

Για $\beta=-4$. (4) $\Rightarrow\omega^2+4\omega+3=0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=16-12=4$. Άρα έχει ρίζες τις: $\omega_1=\dfrac{-4+2}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$,

$\omega_2=\dfrac{-4-2}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$. (3) $\Rightarrow|x|=-1$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$. (3) $\Rightarrow|x|=-3$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες .

1463. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha\beta x^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)x+\alpha\beta=0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\geq4$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\Delta=\left[-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]^2-4\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\beta=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$

β) Θα πρέπει $\alpha^2-\beta^2\neq0\Leftrightarrow\alpha^2\neq\beta^2\Leftrightarrow\alpha\neq\pm\beta$. Οι ρίζες είναι $x_1=\dfrac{\alpha^2\cancel{+\beta^2}+\alpha^2\cancel{-\beta^2}}{2\alpha\beta}=\dfrac{\cancel{2}\alpha^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{\alpha}\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$,

και $x_2=\dfrac{\cancel{\alpha^2}+\beta^2\cancel{-\alpha^2}+\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\cancel{2}\beta^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\alpha\cancel{\beta}}=\dfrac{\beta}{\alpha}$

γ) Από τις σχέσεις Vieta : $S=x_1+x_2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$, $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\cancel{\alpha\beta}}{\cancel{\alpha\beta}}=1$

$$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1\cdot x_2 \geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+1\geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\geq 2 \overset{(\cdot\alpha\beta>0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0 \text{ ισχύει.}$$

1469. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Delta=(2\lambda-1)^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)=\cancel{4\lambda^2}\ \cancel{-4\lambda}+1\cancel{-4\lambda^2}\ \cancel{+4\lambda}=1$ ανεξάρτητη του λ

β) $x_1=\frac{2\lambda\cancel{-1}\cancel{+1}}{\lambda}=\frac{2\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}=2$, $x_2=\frac{2\lambda-1-1}{\lambda}=\frac{2\lambda-2}{\lambda}=\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}$

γ) Από τους τύπους Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{2\lambda-1}{\lambda}$ και $P=x_1\cdot x_2=\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Είναι $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow |x_1-x_2|^2=4 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=4 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=4\ (1)$

Όμως $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\lambda-1}{\lambda}\right)^2-4\frac{\lambda-1}{\lambda}=4 \Leftrightarrow \frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda^2}-\frac{4\lambda-4}{\lambda}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\lambda^2-4\lambda+1}{\lambda^2}-\frac{4\lambda-4}{\lambda}=4 \overset{(\cdot\lambda^2)}{\Leftrightarrow} \cancel{4\lambda^2}\ \cancel{-4\lambda}+1-4\lambda^2\cancel{+4\lambda}=\cancel{4\lambda^2} \Leftrightarrow 4\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

1474. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, με $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\leq\frac{x_1+x_2}{2}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Από τους τύπους Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}=1$

γ) $P=1>0$,άρα οι ρίζες είναι ομόσημοι αριθμοί. Είναι $S=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$ γιατί $\lambda^2+1>0$ και $\lambda>0$.

Επομένως οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί.

δ) Επειδή για $\lambda>0$ είναι $S=x_1+x_2>0$, έχουμε:

$$\sqrt{x_1x_2}\le\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x_1x_2}\le x_1+x_2\Leftrightarrow 4\sqrt{x_1x_2}^2\le\left(x_1+x_2\right)^2\Leftrightarrow 4x_1x_2\le\left(x_1+x_2\right)^2\Leftrightarrow 4\le\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$4\le\frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^2}\overset{(\cdot\lambda^2>0)}{\Leftrightarrow}4\lambda^2\le\lambda^4+2\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda^4-2\lambda^2+1\ge 0\Leftrightarrow(\lambda^2-1)^2\ge 0 \text{ ισχύει.}$$

1475. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, με $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\ge 0$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Από τους τύπους Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}=1$

γ) Επειδή $P=1>0$ οι ρίζες είναι ομόσημοι αριθμοί. Είναι $S=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$ γιατί $\lambda^2+1>0$ και $\lambda>0$, επομένως οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί.

δ) Για $0<\lambda\neq 1$ είναι $S=x_1+x_2>0$. Άρα έχουμε:

$$\frac{x_1+x_2}{2}-1=\frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2}-1=\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}-1=\frac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda}=\frac{\left(\lambda-1\right)^2}{2\lambda}>0, \text{ δηλαδή } \frac{x_1+x_2}{2}-1>0\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{2}>1.$$

1478.α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi=34$ cm και διαγώνιο $\delta=13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=60$ cm^2. (Μονάδες 5)

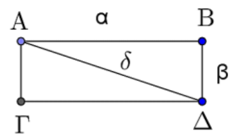
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i) Αν α, β οι πλευρές του ορθογωνίου τότε:



$\Pi=2\alpha+2\beta\Leftrightarrow 34=2\alpha+2\beta\overset{:2}{\Leftrightarrow}\alpha+\beta=17$ (1)

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\delta^2=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=169\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=169\overset{(1)}{\Leftrightarrow}17^2-2\alpha\beta=169\Leftrightarrow 289-2\alpha\beta=169\Leftrightarrow\ 2\alpha\beta=289-169\Leftrightarrow 2\alpha\beta=120\Leftrightarrow\alpha\beta=60$

Άρα το εμβαδόν είναι $E=\alpha\cdot\beta=5\cdot12=60$

ii) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι $S=\alpha+\beta=17$, και το γινόμενο τους είναι $P=\alpha\cdot\beta=60$.

Από τους τύπους του Vieta η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-17x+60=0$ (3)

iii) Η εξίσωση (3) έχει ρίζες τους αριθμούς 5,12, άρα $\alpha=5$ και $\beta=12$ ή $\alpha=12$ και $\beta=5$

β) Αν $\alpha',\ \beta'$ οι πλευρές του ορθογωνίου και δ' η διαγώνιος τότε: $E=\alpha'\cdot\beta'=40$ (4),

$\delta'^2=\alpha'^2+\beta'^2\Leftrightarrow\alpha'^2+\beta'^2=64\Leftrightarrow(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'=64\Leftrightarrow$

$(\alpha'+\beta')^2-80=64\Leftrightarrow(\alpha'+\beta')^2=144\overset{(\alpha',\beta'>0)}{\Leftrightarrow}\alpha'+\beta'=12\,(5)$

Οι αριθμοί $\alpha',\ \beta'$ είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2-12x+40=0$ (6)

Η (6) έχει διακρίνουσα $\Delta'=(-12)^2-4\cdot40=144-160=-16<0$

Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

1491. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1+x_2)^2-18-7(x_1\cdot x_2)^{24}=0. \quad \textbf{(Μονάδες 9)}$$

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5\lambda)^2-4\cdot1\cdot(-1)=25\lambda^2+4>0$ άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S=x_1+x_2=5\lambda,\ \ P=x_1\cdot x_2=-1$

i) $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1\cdot x_2)^{24}=0\Leftrightarrow(5\lambda)^2-18-7(-1)^{24}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow25\lambda^2-18-7=0\Leftrightarrow25\lambda^2=25\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$

ii) Για $\lambda=1$ είναι $S=5$ και $x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2=x_1^2x_2+x_1x_2^2-3x_1-3x_2+4=$

$=x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)-3(x_1+x_2)+4=-1\cdot5-3\cdot5+4=-5-15+4=-16$

1492. Οι πλευρές x_1,x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0$, με $\lambda\in(0,4)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq16$, για κάθε $\lambda\in(0,\ 4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Λύση

α) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε : $S=x_1+x_2=4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),P=x_1\cdot x_2=16$

i) $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2\cdot 4\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right) = 8\lambda + \dfrac{8}{\lambda}$

ii) $E = x_1 \cdot x_2 = 5$

β) $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \dfrac{8}{\lambda} \geq 16 \overset{(\cdot\lambda>0)}{\Leftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 \geq 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 \geq 0 \overset{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$ ισχύει

γ) $\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \dfrac{8}{\lambda} = 16 \overset{(\cdot\lambda\neq 0)}{\Leftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 = 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 = 0 \overset{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη. Τότε προκύπτει η εξίσωση :
$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Άρα $x_1 = x_2 = 4$.Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε τετράγωνο πλευράς 4.

1493. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0$ με $\lambda \in (0,2)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Λύση

α) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = 2, P = x_1 \cdot x_2 = \lambda(2-\lambda) = 2\lambda - \lambda^2$

i) $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\cdot 2 = 4$ **ii)** $E = x_1 \cdot x_2 = 2\lambda - \lambda^2$

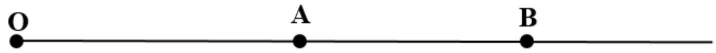
β) $E \leq 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$ ισχύει

γ) $E = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Για $\lambda = 1$ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο . Τότε προκύπτει η εξίσωση :
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα $x_1 = x_2 = 1$ επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε τετράγωνο πλευράς 1.

1504. Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A , s_B , s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$s_A < s_B$, $s_\Gamma = \dfrac{s_A + 3s_B}{4}$ και $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$. Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A , s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1{,}4$ και $s_A \cdot s_B = 0{,}45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A , s_B . (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A , s_B , s_Γ και s_Δ . (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow \cancel{s_\Delta} - s_A = \cancel{s_\Delta} - s_B \Leftrightarrow -s_A = -s_B \Leftrightarrow s_A = s_B$ άτοπο γιατί $s_A < s_B$

ή $s_\Delta - s_A = -(s_\Delta - s_B) \Leftrightarrow s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B \Leftrightarrow 2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2}$

$s_A < s_\Delta \Leftrightarrow s_A < \dfrac{s_A + s_B}{2} \Leftrightarrow 2s_A < s_A + s_B \Leftrightarrow s_A < s_B$ ισχύει. $s_A < s_\Delta < s_\Gamma < s_B$

$s_\Delta < s_\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{s_A + s_B}{2} < \dfrac{s_A + 3s_B}{4} \Leftrightarrow 2(s_A + s_B) < s_A + 3s_B \Leftrightarrow 2s_A + 2s_B < s_A + 3s_B \Leftrightarrow s_A < s_B$ ισχύει.

$s_\Gamma < s_B \Leftrightarrow \dfrac{s_A + 3s_B}{4} < s_B \Leftrightarrow s_A + 3s_B < 4s_B \Leftrightarrow s_A < s_B$ ισχύει.

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = s_A + s_B = 1,4$, γινόμενο ριζών $P = s_A \cdot s_B = 0,45$ και είναι η $s^2 - 1,4s + 0,45 = 0$

ii) Οι αποστάσεις s_A και s_B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $s^2 - 1,4s + 0,45 = 0$ δηλαδή $s_A = 0,5km$ και $s_B = 0,9km$ ($s_A < s_B$). Η απόσταση s_Γ είναι $s_\Gamma = \dfrac{s_A + 3s_B}{4} = \dfrac{0,5 + 3\cdot 0,9}{4} = \dfrac{3,2}{4} = 0,8km$

Η απόσταση s_Δ είναι $s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2} = \dfrac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7km$

1508. Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$. **(Μονάδες 4)**

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$. **(Μονάδες 7)**

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\lambda = 4 - 4\lambda = 4(1-\lambda) > 0$ γιατί $\lambda < 1 \Leftrightarrow 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow 4(1-\lambda) > 0$
Άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = 2\,(1)$

γ) i) Από την $(1) \Rightarrow x_1 - 2 = -x_2$.Επομένως $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow \left(x_1 - 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4\right)$ ή
$\left(x_1 - 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = 0 \text{ άτοπο}\right)$ Άρα $x_1 - x_2 = 4\,(2)$

ii) Από (1)+(2) $\Rightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$ και $x_2 = 2 - x_1 = -1$ Από τις σχέσεις Vieta: $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -3$

1509. Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - \left(\alpha^2 - 1\right)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \left(\alpha^2 + 1\right)^2$. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|p_1 - p_2| = 2$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta = \left[-\left(\alpha^2 - 1\right)\right]^2 - 4\cdot\alpha\cdot(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = \left(\alpha^2 + 1\right)^2$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \frac{\alpha^2 \cancel{-1} + \alpha^2 \cancel{+1}}{2\alpha} = \frac{\cancel{2}\alpha^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{\alpha}} = \alpha$ και $p_2 = \frac{\cancel{\alpha^2} - 1 \cancel{-\alpha^2} - 1}{2\alpha} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε : $S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}} = -1$

$|p_1 - p_2| = 2 \Leftrightarrow |p_1 - p_2|^2 = 4 \Leftrightarrow (p_1 - p_2)^2 = 4 \Leftrightarrow p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 = 4 \Leftrightarrow (p_1 + p_2)^2 - 4p_1p_2 = 4 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 - 4(-1) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 + \cancel{4} = \cancel{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου βαθμού

2ο Θέμα

1357. Δίνονται οι ανισώσεις $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. **(Μονάδες 15)**

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5$

$2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow 3\le 3x \Leftrightarrow x\ge 1$

β) Το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το $[1,5)$.

1533. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. **(Μονάδες 10)**

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Πρέπει $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 2^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-2)\ge 0 \Leftrightarrow 4-4\lambda+8\ge 0 \Leftrightarrow 4\lambda\le 12 \Leftrightarrow \lambda\le 3$

β) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε $S=x_1+x_2=-2$ και $P=x_1\cdot x_2=\lambda-2$

Επομένως $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow \lambda-2-2(-2)=1 \Leftrightarrow \lambda-2+4=1 \Leftrightarrow \lambda=-1$

4ο Θέμα

1404. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\ne -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=12\lambda+25$. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\ne -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. **(Μονάδες 7)**

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1x_2$. **(Μονάδες 4)**

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1x_2+3)^2=0$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\Delta=(2\lambda+3)^2-4\cdot(\lambda+2)(\lambda-2)=\cancel{4\lambda^2}+12\lambda+9\cancel{-4\lambda^2}+16=12\lambda+25$

β) Πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 12\lambda+25>0 \Leftrightarrow 12\lambda>-25 \Leftrightarrow \lambda>-\frac{25}{12}$

γ) $S=x_1+x_2=-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}=\frac{-2\lambda-3}{\lambda+2}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}$

δ) $\left(x_1+x_2-1\right)^2+\left(x_1\cdot x_2+3\right)^2=0 \Leftrightarrow x_1+x_2-1=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2\lambda-3}{\lambda+2}-1=0 \overset{(\cdot(\lambda+2))}{\Leftrightarrow} -2\lambda-3-\lambda-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\lambda=5 \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{5}{3}$ και $x_1\cdot x_2+3=0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}+3=0 \overset{(\cdot(\lambda+2))}{\Leftrightarrow} \lambda-2+3\lambda+6=0 \Leftrightarrow 4\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=1$

Το λ παίρνει 2 τιμές ταυτόχρονα που είναι άτοπο.

1423. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda\in\mathbb{R}$, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot1\cdot(\lambda^2-1)=\cancel{4\lambda^2}-\cancel{4\lambda^2}+4=4>0$.

Άρα η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x_1=\dfrac{2\lambda+2}{2}=\dfrac{\cancel{2}(\lambda+1)}{\cancel{2}}=\lambda+1$ και $x_2=\dfrac{2\lambda-2}{2}=\dfrac{\cancel{2}(\lambda-1)}{\cancel{2}}=\lambda-1$

γ) Πρέπει $-2<\lambda+2<4 \Leftrightarrow -4<\lambda<2 \Leftrightarrow \lambda\in(-4,2)$ και $-2<\lambda-2<4 \Leftrightarrow 0<\lambda<6 \Leftrightarrow \lambda\in(0,6)$

Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι το διάστημα (0,2). Άρα θα πρέπει $\lambda\in(0,2)$.

13312.Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. **(Μονάδες 7)**

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\le9$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν α = β. **(Μονάδες 5)**

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή η (1) είναι 2ου βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν

$\Delta\ge0 \Leftrightarrow (-6)^2-4\cdot1\cdot\lambda\ge0 \Leftrightarrow 36-4\lambda\ge0 \Leftrightarrow 36\ge4\lambda \Leftrightarrow \lambda\le9$

β) i. Επειδή οι αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, από τους τύπους του Vietta προκύπτει ότι είναι ρίζες της (1). Είναι $P=x_1x_2 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\lambda$, όμως $\lambda\le9$ άρα και $\alpha\cdot\beta\le9$.

ii. Επειδή οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι α = β, αν και μόνο αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda=9 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=9$.

γ) Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β έχουν περίμετρο 2α + 2β, άρα $2\alpha+2\beta=12 \Leftrightarrow \alpha+\beta=6$. Το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι $\alpha\cdot\beta$.

Στο β σκέλος δείξαμε ότι όταν α + β = 6 τότε $\alpha\cdot\beta\le9$ και επιπλέον η ισότητα $\alpha\cdot\beta=9$ ισχύει μόνο όταν α = β. Άρα η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

Ανισώσεις με απόλυτα

2ο Θέμα

1243.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $|x-1|\geq 1 \Leftrightarrow (x-1\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 2)$ ή $(x-1\leq -1 \Leftrightarrow x\leq 0)$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα διαστήματα $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

β) $d(x,5)<3 \Leftrightarrow |x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow 2<x<8$

γ) Οι κοινές λύσεις των (α) και (β) είναι το διάστημα (2,8)

1253.α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow 1<x<9$

β) Αφού ο αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση έχουμε $1<\alpha<9 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$

1272. Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. **(Μονάδες 10)**

β) $x^2+4x+3<0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $d(x,-2)<1 \Leftrightarrow |x+2|<1 \Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow -3<x<-1$

β) Από (α) ερώτημα : $x<-1 \Leftrightarrow x+1<0$ και $x>-3 \Leftrightarrow x+3>0$

Επομένως : $x^2+4x+3=x^2+x+3x+3=x(x+1)+3(x+1)=\underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{>0}<0$

1284.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $\alpha\geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $|x+4|\geq 3 \Leftrightarrow (x+4\geq 3 \Leftrightarrow x\geq -1)$ ή $(x+4\leq -3 \Leftrightarrow x\leq -7)$

β) $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+4\geq 4-1 \Leftrightarrow \alpha+4\geq 3>0$ και $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+1\geq 0$

Άρα : $A=||\alpha+4|-3| \overset{\alpha+4\geq 0}{=} |\alpha+4-3|=|\alpha+1| \overset{\alpha+1\geq 0}{=} \alpha+1$

1330.α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

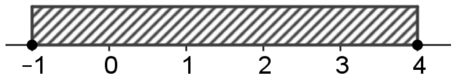
i) $|2x-3|\le 5$ **(Μονάδες 9)**

ii) $|2x-3|\ge 1$ **(Μονάδες 9)**

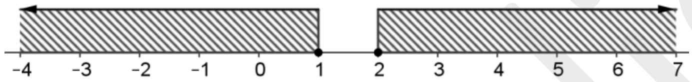
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. **(Μονάδες 7)**

Λύση

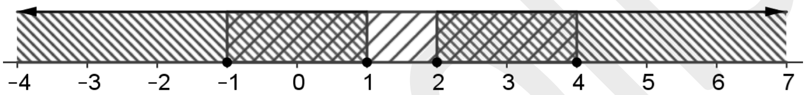
α) i) $|2x-3|\le 5 \Leftrightarrow -5\le 2x-3\le 5 \Leftrightarrow -2\le 2x\le 8 \Leftrightarrow -1\le x\le 4$



ii) $|2x-3|\ge 1 \Leftrightarrow (2x-3\ge 1 \Leftrightarrow 2x\ge 4 \Leftrightarrow x\ge 2)$ ή $(2x-3\le -1 \Leftrightarrow 2x\le 2 \Leftrightarrow x\le 1)$



β) $x\in[-1,1]\cup[2,4]$



1331.α)Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0$ (1) . **(Μονάδες 9)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2) . **(Μονάδες 9)**

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=1+48=49=7^2$. $x_1=\dfrac{1+7}{2\cdot 2}=\dfrac{8}{4}=2$ και $x_2=\dfrac{1-7}{2\cdot 2}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

β) $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(1,3)$

γ) Επειδή $2\in(1,3)$, ενώ $-\dfrac{3}{2}\notin(1,3)$ το 2 είναι η ζητούμενη τιμή.

1355.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$. **(Μονάδες 8)**

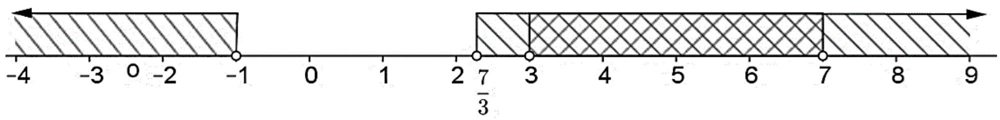
β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow 3<x<7$

β) $|2-3x|>5 \Leftrightarrow (2-3x>5 \Leftrightarrow -3x>3 \Leftrightarrow x<-1)$ ή $\left(2-3x<-5 \Leftrightarrow -3x<-7 \Leftrightarrow x>\dfrac{7}{3}\right)$



γ) Άρα $x\in(3,7)$

1365.α) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. **(Μονάδες 9)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. **(Μονάδες 9)**

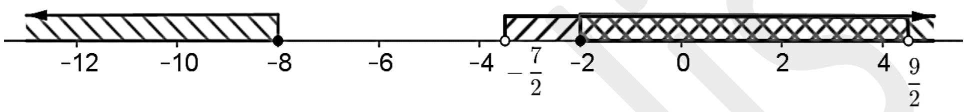
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} -8<2x-1<8 \Leftrightarrow -7<2x<9 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

β) $|x+5|\geq 3 \Leftrightarrow (x+5\geq 3 \Leftrightarrow x\geq -2)$ ή $(x+5\leq -3 \Leftrightarrow x\leq -8)$

γ) $x\in\left[-2,\frac{9}{2}\right)$



1367.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$. **(Μονάδες 9)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$. **(Μονάδες 9)**

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $|2x-4|=3|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=3(x-1) \Leftrightarrow 2x-4=3x-3 \Leftrightarrow x=-1$ ή

$2x-4=-3(x-1) \Leftrightarrow 2x-4=-3x+3 \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\frac{5}{7}$

β) $|3x-5|>1 \Leftrightarrow (3x-5>1 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2)$ ή $\left(3x-5<-1 \Leftrightarrow 3x<4 \Leftrightarrow x<\frac{4}{3}\right)$

γ) Είναι $-1<\frac{4}{3}$ και $\frac{5}{7}<\frac{4}{3}$, άρα οι αριθμοί -1 και $\frac{4}{3}$ ανήκουν στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$, επομένως είναι λύσεις της ανίσωσης.

1374.

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ **(Μονάδες 9)**

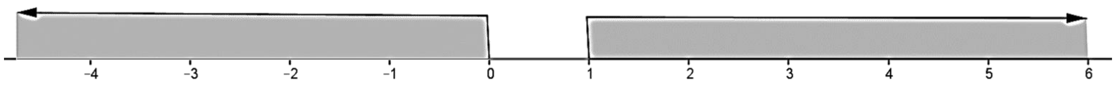
ii) $|1-2x|\geq 1$ **(Μονάδες 9)**

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -6<-2x<4 \Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow -2<x<3$

$|1-2x| \geq 1 \Leftrightarrow (1-2x \geq 1 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0)$ ή $(1-2x \leq -1 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1)$



β) Συναληθεύουν στο $(-2,0] \cup [1,3)$.Οι ακέραιοι αριθμοί που υπάρχουν στα διαστήματα αυτά είναι οι: -1,0,1,2.

12909.Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2,8)$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$. (Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $|x-3|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow -5+3<x<5+3 \Leftrightarrow -2<x<8$, άρα $x \in (-2,8)$.

β) Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$, είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα (-2, 8), δηλαδή οι : -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4, 5, 6, 7.

γ) Είναι $A=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $B=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$ οπότε:
$A \cup B=\{-3,-2-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $A \cap B=\{-1,0,3,4\}$

13025.α) Να λύσετε την ανίσωση $-\dfrac{3-2x}{7} \geq 5$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$. (Μονάδες 10)

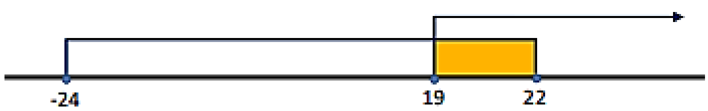
γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 5)

Λύση

α) $-\dfrac{3-2x}{7} \geq 5 \Leftrightarrow -(3-2x) \geq 35 \Leftrightarrow -3+2x \geq 35 \Leftrightarrow 2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$

β) $|-x-1| \leq 23 \Leftrightarrow |-(x+1)| \leq 23 \Leftrightarrow |x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -24 \leq x \leq 22$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ' όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.



4ο Θέμα

1406.Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(\alpha-1)^2-16$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1,x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\Delta=(\alpha+1)^2-4\cdot1\cdot(4+\alpha)=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$

β) Το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2-16>0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2>16\Leftrightarrow$
$\sqrt{(\alpha-1)^2}>\sqrt{16}\Leftrightarrow|\alpha-1|>4\Leftrightarrow(\alpha-1<-4\Leftrightarrow\alpha<-3)$ ή $(\alpha-1>4\Leftrightarrow\alpha>5)$

γ) i. Είναι $S=-\frac{\beta}{\alpha}=\alpha+1$, $P=\frac{\gamma}{\alpha}=4+\alpha$

ii. $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=|x_1-1||x_2-1|=|(x_1-1)(x_2-1)|=|x_1x_2-x_1-x_2+1|=|P-(x_1+x_2)+1|=$
$|P-S+1|=|4+\alpha-\alpha-1+1|=4$

1416. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda\neq0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\lambda=0$ προκύπτει η εξίσωση $-2x-2=0\Leftrightarrow2x=-2\Leftrightarrow x=-1$

β) i) $\Delta=[2(\lambda-1)]^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda^2+8\lambda=\cancel{4\lambda^2}\cancel{-8\lambda}+4\cancel{-4\lambda^2}\cancel{+8\lambda}=4=2^2$

ii) $|x_1-x_2|>1\Leftrightarrow\left|-1-\left(-1+\frac{2}{\lambda}\right)\right|>1\Leftrightarrow\left|\cancel{-1}\cancel{+1}-\frac{2}{\lambda}\right|>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|-\frac{2}{\lambda}\right|>1\Leftrightarrow\frac{2}{|\lambda|}>1\Leftrightarrow|\lambda|<2\Leftrightarrow-2<\lambda<2\overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow}\lambda\in(-2,0)\cup(0,2)$

1472.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\leq5$. (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης που ακολουθεί $|x-3|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\leq5$. (Μονάδες 5)

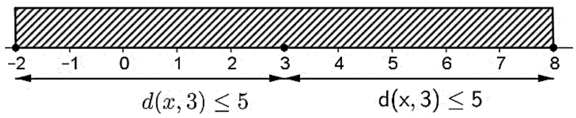
δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\leq5$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $|x-3|\le 5 \Leftrightarrow -5\le x-3\le 5 \Leftrightarrow -2\le x\le 8 \Leftrightarrow x\in[-2,8]$

β)



Το σύνολο των λύσεων είναι τα σημεία του διαστήματος [-2,8] με κέντρο 3 και ακτίνα 5

γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα [-2,8] είναι: -2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8

δ) $\big||x|-3\big|\le 5 \Leftrightarrow -5\le |x|-3\le 5 \Leftrightarrow -2\le |x|\le 8 \overset{|x|\ge 0}{\Leftrightarrow} |x|\le 8 \Leftrightarrow -8\le x\le 8 \Leftrightarrow x\in[-8,8]$

Οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα [-8,8] είναι: -8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8

1473.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. **(Μονάδες 6)**

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 6)**

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\le 2$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

$x^2+2x+3=\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+3-\alpha=0$ (1) με $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(3-\alpha)=4-12+4\alpha=4\alpha-8$

α) i) Θα πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2$

ii) Θα πρέπει $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow 4\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2$

Για $\alpha=2$: $(1)\Rightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

β) i) $f(x)=x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2\ge 2 \quad ((x+1)^2\ge 0)$

ii) Πρέπει $f(x)-2\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge 2$ το οποίο ισχύει από (i)

$\sqrt{f(x)-2}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2\cancel{+2}\cancel{-2}}\le 2 \Leftrightarrow |x+1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$

1521.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$. **(Μονάδες 10)**

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow x\in(2,6)$

β) i) Έχουμε ότι $d(x,4)<2 \Leftrightarrow |x-4|<2 \Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow 2<3x-4<14$ (1)

Άρα $3x-4>0$ και $|3x-4|=3x-4$. Επομένως από (1) $2<|3x-4|<14$ δηλαδή η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii) $d(3x,19)=|3x-19|$ και $2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow -13<3x-19<-1 (2)$ άρα $3x-19<0$.

Άρα $d(3x,19)=|3x-19|=-3x+19$ και $(2) \Rightarrow 13>-3x+19>1 \Leftrightarrow 1<-3x+19<13 \Leftrightarrow 1<d(3x,19)<13$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

2ο Θέμα

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

1250. Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $x_1=\dfrac{3+5}{4}=2$, $x_2=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα $2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$

β) Θα πρέπει $2x^2-3x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq -\dfrac{1}{2}$

γ) $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(2x+1)}=\dfrac{x-2}{2x+1}$

1264. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. **(Μονάδες 12)**

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Το 1 ρίζα του τριωνύμου , επομένως $2\cdot 1^2+\lambda\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow 2+\lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=3$

β) Για $\lambda=3$ το τριώνυμο γίνεται $2x^2+3x-5$. $\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$ και $x_1=\dfrac{-3+7}{4}=\dfrac{4}{4}=1$,

$x_2=\dfrac{-3-7}{4}=\dfrac{-10}{4}=-\dfrac{5}{2}$. Επομένως $2x^2+3x-5=2(x-1)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)=(x-1)(2x+5)$.

1273. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$. **(Μονάδες 12)**

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\Delta=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot(-1)(\sqrt{3})=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x_1=\dfrac{\cancel{-\sqrt{3}}+1+\cancel{\sqrt{3}}+1}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-\sqrt{3}\cancel{+1}-\sqrt{3}\cancel{-1}}{-2}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$.

Επομένως $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=-(x-\sqrt{3})(x+1)$

Δευτεροβάθμιες ανισώσεις

1271. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\le 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). **(Μονάδες 12)**

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. **(Μονάδες 13)**

Λύση

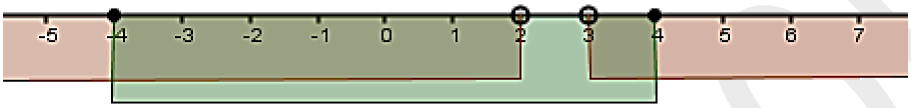
α) $-x^2+5x-6<0\,(1)$ $\Delta=5^2-4\cdot(-1)(-6)=25-24=1$, $x_1=\dfrac{-5+1}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-4}{-2}=2$, $x_1=\dfrac{-5-1}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-6}{-2}=3$

x	-∞		2		3		+∞
$-x^2+5x-6$		−	0	+	0	−	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

$x^2-16\le 0\Leftrightarrow x^2\le 16\Leftrightarrow |x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4$.

β)



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι τα διαστήματα $[-4,2)\cup(3,4]$.

1277.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$. **(Μονάδες 12)**

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$ **(Μονάδες 8)**

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot21=16$, $x_1=\dfrac{10+4}{2}=7$, $x_2=\dfrac{10-4}{2}=3$

x	-∞		3		7		+∞
$x^2-10x+21$		+	0	−	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα (3,7)

β) i) $3<x<7\Leftrightarrow 0<x-3<4\Rightarrow |x-3|=x-3$ και $x^2-10x+21<0$ για $3<x<7$, οπότε

$|x^2-10x+21|=-x^2+10x-21$

Επομένως $A=|x-3|+|x^2-10x+21|=x-3-x^2+10x-21=-x^2+11x-24$

ii) $A=6\Leftrightarrow -x^2+11x-24=6\Leftrightarrow -x^2+11x-30=0\Leftrightarrow x=5$ ή $x=6$

1279.α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\le 0$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\Delta=(-4)^2-4\cdot3\cdot1=16-12=4=2^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{4+2}{2\cdot 3}=\frac{6}{6}=1$ και $x_2=\frac{4-2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left[\frac{1}{3},1\right]$

β) Αφού α, β λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Είναι $\frac{1}{3}\le \alpha\le 1\Leftrightarrow 1\le 3\alpha\le 3$ (1) και $\frac{1}{3}\le \beta\le 1\Leftrightarrow 2\le 6\beta\le 6$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε $3\le 3\alpha+6\beta\le 9\Leftrightarrow \frac{3}{9}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1$

Επομένως $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ λύση της ανίσωσης .

1291.α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$. **(Μονάδες 8)**

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. **(Μονάδες 12)**

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

Λύση

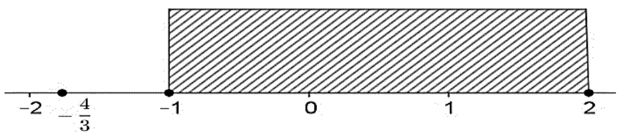
α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9=3^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{1+3}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2$ και $x_2=\frac{1-3}{2\cdot 1}=\frac{-2}{2}=-1$

β)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-1,2)$



γ) $-\frac{4}{3}\notin(-1,2)$, άρα δεν είναι λύση της ανίσωσης.

1300.α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. **(Μονάδες 10)**

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4<0$. Άρα $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) $x^2+4x+5>0\Rightarrow|x^2+4x+5|=x^2+4x+5$

$x^2+4x+4=(x+2)^2\ge 0\Rightarrow|x^2+4x+4|=x^2+4x+4$

Επομένως $B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = \cancel{x^2}\ \cancel{+4x} + 5 \cancel{-x^2}\ \cancel{-4x} - 4 = 1$

1306. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ \ x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

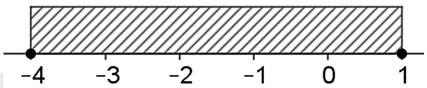
Λύση

α) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1 = \dfrac{-9+15}{2 \cdot 3} = \dfrac{6}{6} = 1$ και $x_2 = \dfrac{-9-15}{2 \cdot 3} = \dfrac{-24}{6} = -4$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2 + 9x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $[-4, 1]$



β) Για να είναι λύση πρέπει

$\sqrt[3]{2} \in [-4, 1] \Leftrightarrow -4 \le \sqrt[3]{2} \le 1 \Leftrightarrow (-4)^3 \le \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \le 1^3 \Leftrightarrow -64 \le 2 \le 1$ που δεν ισχύει,

άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2} \notin [-4, 1]$ και δεν είναι λύση της ανίσωσης.

1346. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \ge 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της(1). (Μονάδες13)

Λύση

α) Πρέπει $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \ge 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3(\lambda + 2)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le \lambda \le \frac{2}{3}$$

β) $S^2 - P - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda^2 + \lambda - 1) - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \cancel{\lambda^2}\ \cancel{-\lambda^2} - \lambda + 1 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow -\lambda - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \le -1$

1350.α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \le 3$ και $2x^2 - x - 1 \ge 0$. (Μονάδες16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

Λύση

α) $|2x - 5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x - 5 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$

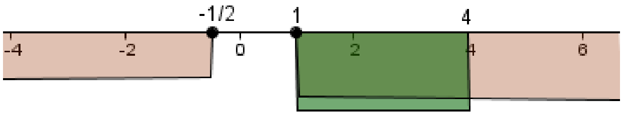
Για την $2x^2 - x - 1 \ge 0$, έχουμε: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2$ και $x_1 = \dfrac{1+3}{2 \cdot 2} = \dfrac{4}{4} = 1$,

$x_2 = \dfrac{1-3}{2 \cdot 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα η λύση της ανίσωσης είναι $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

β)



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α) είναι το διάστημα $[1,4]$.

1356. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$. **(Μονάδες 5)**

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1$, $x_1=\frac{3+1}{2\cdot2}=\frac{4}{4}=1$, $x_2=\frac{3-1}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Επομένως οι ρίζες του είναι οι αριθμοί $1,\frac{1}{2}$

β)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$

γ) Είναι $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$.Άρα ο $\frac{1}{\sqrt{2}}$ δεν είναι λύση ενώ ο $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

1363.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$. **(Μονάδες 9)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\le0$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α)ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β)ερωτήματος. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}^{(\cdot15)}\Leftrightarrow5|x+1|-3|x+1|-12=10\Leftrightarrow2|x+1|=22\Leftrightarrow|x+1|=11\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+1=11\Leftrightarrow x=10$ ή $x+1=-11\Leftrightarrow x=-12$

β) $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot3=4+12=16=4^2$, $x_1=\frac{-2+4}{2\cdot(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$, $x_2=\frac{-2-4}{2\cdot(-1)}=\frac{-6}{-2}=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του $x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

γ) $-12 \in (-\infty,-1]$,$10 \in [3,+\infty)$.Άρα οι αριθμοί -12 και 10 είναι λύσεις της ανίσωσης $-x^2+2x+3 \le 0$.

12722.Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-x-3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$. **(Μονάδες 12)**

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x)<0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)=1+12=13>0$

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{13}}{2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ και } x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{13}}{2}=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

β) Επειδή $-2<0$, είναι $-2f(x)<0$ όταν $f(x)>0$ και επειδή α = 1 > 0, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών του, άρα $x \in \left(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$

12976.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$. **(Μονάδες 12)**

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x) \le -1$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-1)=9$ και ρίζες $x_1=\frac{1+\sqrt{9}}{4}=1$, $x_2=\frac{1-\sqrt{9}}{4}=-\frac{1}{2}$

Είναι $2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

β) $x(1-2x) \le -1 \Leftrightarrow x-2x^2 \le -1 \Leftrightarrow 0 \le 2x^2-x-1$

Από τον διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου, προκύπτει ότι $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup [1,+\infty)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4ο Θέμα

1391. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. **(Μονάδες 9)**

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

$\Delta=\left(\lambda^2+1\right)^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=\left(\lambda^2-1\right)^2$

α) $\Delta=\left(\lambda^2-1\right)^2\geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει ρίζες ίσες όταν $\Delta=0\Leftrightarrow\left(\lambda^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm 1$.

γ) Είναι $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\Delta\leq 0$ και $\lambda<0$ (το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι ομόσημο του α). Όμως από το (α) σκέλος είναι $\Delta\geq 0$, άρα τελικά πρέπει $\Delta=0$ και $\lambda<0$. Είναι $\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=\pm 1$ και επειδή $\lambda<0$, τελικά είναι $\lambda=-1$.

1396. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες10)

δ) Αν $\left|\lambda^2-4\lambda-5\right|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

Λύση

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(4\lambda+5)=4\lambda^2-16\lambda-20=4(\lambda^2-4\lambda-5)=4(\lambda+1)(\lambda-5)$

α) Για λ=5 : Δ =0, άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα

β) $\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda+1)(\lambda-5)=0\Leftrightarrow(\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1)$ ή $(\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda=5)$.

Επομένως και για λ =-1 έχει διπλή ρίζα

γ) Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow(\lambda+1)(\lambda-5)>0\Leftrightarrow(\lambda<-1)$ ή $(\lambda>5)\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

δ) $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5\Leftrightarrow|\lambda^2-4\lambda-5|=-\lambda^2+4\lambda+5=-\left(\lambda^2-4\lambda-5\right)$

πρέπει $\Delta<0\Leftrightarrow(\lambda+1)(\lambda-5)<0\Leftrightarrow\lambda\in(-1,5)$

1397. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1,x_2 με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$.

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε λ∈ℝ-{0}

β) $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$

γ) Αν λ>0 τότε S>0 και P=1>0 άρα έχει ρίζες θετικές.

δ) Επειδή λ> 0 το τριώνυμο έχει θετικές ρίζες. Επομένως : $0<x_1<\kappa<x_2<\mu$ και το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	-∞	0	x_1	κ	x_2	μ	+∞
f(x)		+	0	-	0	+	

Επομένως f(0)>0 , f(κ) <0 ,f(μ)>0 και f(0)·f(κ)·f(μ)<0

1402. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1,x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1,x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\Delta=\left[-2(\lambda-1)\right]^2-4\cdot1\cdot(\lambda+5)=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda-20=4\lambda^2-8\lambda+3-4\lambda-20\Leftrightarrow$
$\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$

β) Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow4\lambda^2-12\lambda-16>0\overset{:(4)}{\Leftrightarrow}\lambda^2-3\lambda-4>0\Leftrightarrow\lambda<-1$ ή $\lambda>4$

γ) $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}\Leftrightarrow|x_1-x_2|=\sqrt{24}\Leftrightarrow|x_1-x_2|^2=\sqrt{24}^2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=24\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24\overset{\text{Σχέσεις Vieta}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\left[2(\lambda-1)\right]^2-4(\lambda+5)=24\Leftrightarrow\Delta=24\Leftrightarrow4\lambda^2-12\lambda-16=24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow4\lambda^2-12\lambda-40=0\overset{:(4)}{\Leftrightarrow}\lambda^2-3\lambda-10=0\Leftrightarrow\lambda=2$ απορρίπτεται ή $\lambda=-5$.

1409. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος.
Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος y = 175 m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Θα επανέλθει όταν $y=0\Leftrightarrow60t-5t^2=0\Leftrightarrow5t(12-t)=0\Leftrightarrow t=0\,\text{sec}$ απορρίπτεται ή $t=12\,\text{sec}$

β) $y=175\Leftrightarrow60t-5t^2=175\Leftrightarrow5t^2-60t+175=0\overset{(:5)}{\Leftrightarrow}t^2-12t+35=0\Leftrightarrow t=5\,\text{sec}$ ή $t=7\,\text{sec}$

γ) $y>100\Leftrightarrow60t-5t^2>100\Leftrightarrow5t^2-60t+100<0\overset{(:5)}{\Leftrightarrow}t^2-12t+20<0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $t^2-12t+20$ είναι ίση με

$\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot20=144-80=64=8^2$ και οι ρίζες του είναι : $t_1=\dfrac{12+8}{2}=\dfrac{20}{2}=10$ και

$t_2=\frac{12-8}{2}=\frac{4}{2}=2$. Τοπρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα:

t	0		2		10		$+\infty$
$t^2-12t+20$		+	0	−	0	+	

Άρα $t^2-12t+20<0 \Leftrightarrow t\in(2,10)$ sec

1424.Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\le 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. **(Μονάδες 10)**

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$. **(Μονάδες 5)**

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5 \Leftrightarrow x\in(-1,5)$

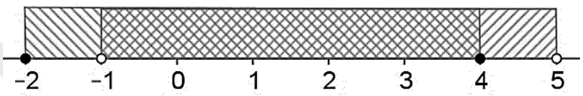
Για την $x^2-2x-8\le 0$, έχουμε: $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36=6^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$ και $x_2=\frac{2-6}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	−	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2-2x-8\le 0$ είναι το διάστημα $[-2,4]$

β)



Όπως φαίνεται από τον άξονα οι ανισώσεις συναληθεύουν για x ∈ (-1, 4].

γ) Επειδή οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, είναι $-1<\rho_1\le 4$, $-1<\rho_2\le 4$, άρα και $-2<\rho_1+\rho_2\le 8 \Leftrightarrow -1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 4$

Δηλαδή ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ βρίσκεται στο διάστημα κοινών λύσεων, άρα είναι κοινή τους λύση.

1425.Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. **(Μονάδες 10)**

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$. **(Μονάδες 5)**

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $2\le|x|\le 3\,(1)$

Για $x\ge 0 \Rightarrow |x|=x$ και $(1)\Rightarrow 2\le x\le 3 \Leftrightarrow x\in[2,3]$

Για $x\le 0 \Rightarrow |x|=-x$ και $(1)\Rightarrow 2\le -x\le 3 \Leftrightarrow -2\ge x\ge -3 \Leftrightarrow -3\le x\le -2 \Leftrightarrow x\in[-3,-2]$

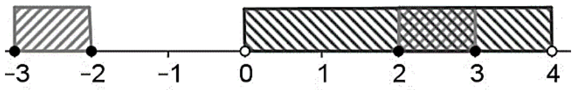
Άρα $x\in[-3,-2]\cup[2,3]$

$x^2-4x<0 \Leftrightarrow x(x-4)<0$ (2). Οι ρίζες είναι οι αριθμοί 0 και 4

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	$-$	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα (0,4)

β)



Όπως φαίνεται από τον άξονα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ) Επειδή οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, είναι $2<\rho_1\le 3$, $2<\rho_2\le 3$, άρα και $4<\rho_1+\rho_2\le 6 \Leftrightarrow 2<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 3$

Δηλαδή ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ βρίσκεται στο διάστημα κοινών λύσεων, άρα είναι κοινή τους λύση.

1426.Δίνονται οι ανισώσεις : $|x+1|\le 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. **(Μονάδες 10)**

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$. **(Μονάδες 5)**

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $|x+1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -3\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-3,1]$

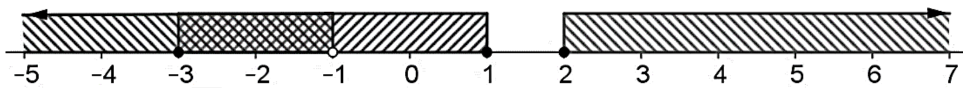
Για την $x^2-x-2>0$, έχουμε: $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9=3^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$ και $x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2-x-2>0$ είναι $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

β)



Όπως φαίνεται από τον άξονα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$

γ) Επειδή οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, είναι $-3\le\rho_1<-1$, $-3\le\rho_2<-1 \Leftrightarrow 3\ge-\rho_2>1 \Leftrightarrow 1<-\rho_2\le 3$, άρα και $-2<\rho_1-\rho_2<2 \Leftrightarrow \rho_1-\rho_2\in(-2,2)$

1432.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)

Λύση

α) $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1=1^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$ και $x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

β) i) $\Delta=(2-\lambda)^2-\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot(\lambda-2)=4-4\lambda+\lambda^2-\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6$

Είναι $\lambda^2-5\lambda+6>0$ για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ από το (α) ερώτημα. Άρα $\Delta>0$ και η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

ii) Πρέπει $P=x_1\cdot x_2>0\Leftrightarrow\frac{\lambda-2}{\frac{1}{4}}>0\Leftrightarrow4(\lambda-2)>0\overset{(:4)}{\Leftrightarrow}\lambda-2>0\Leftrightarrow\lambda>2$

Τελικά $\left.\begin{array}{l}\lambda>2\\ \lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda>3$

1436.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\sqrt{\alpha}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) $x^2<x\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x(x-1)<0\Leftrightarrow0<x<1$

β) i) $0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$.Αφού: $\alpha>0\Leftrightarrow\alpha^2>0$

$\alpha^2<\alpha$ από (α) ερώτημα $(0<\alpha<1)$

$\alpha=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2$ άρα $\alpha^2<\alpha\Leftrightarrow\alpha^2<\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha<\sqrt{\alpha}$ και $\alpha<1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{\alpha}<1$

ii) $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^2<\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2\Leftrightarrow1+\alpha<1+2\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}^2\Leftrightarrow$

$\cancel{1}+\cancel{\alpha}<\cancel{1}+2\sqrt{\alpha}+\cancel{\alpha}\Leftrightarrow0<2\sqrt{\alpha}$ ισχύει.

1438.Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.   (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$,όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda-1)^2 \geq 0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

γ) $S = x_1 + x_2 = 1$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda - \lambda^2$

Για να έχει η παράσταση Α νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ θα πρέπει $S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0$ το οποίο ισχύει αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2 - \lambda + 1$ είναι ίση με $\Delta_1 = -3 < 0$

1442.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: α, α^2, $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί 0,1

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	−	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2 > x$ είναι η ένωση των διαστημάτων : $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

β)i) $0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$, αφού: $\alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > 1$ και

από (α) ερώτημα είναι $\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 < \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha$

ii) $\alpha < \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2$, αφού: $\alpha < \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$ ισχύει από (α) ερώτημα

$\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha + \alpha^2 < 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$ ισχύει από (α) ερώτημα

1450. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. **(Μονάδες 10)**

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $(x-2)^2=\lambda(4x-3)\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda\Leftrightarrow$

$x^2-4x-4\lambda x+4+3\lambda=0\Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0$

β) Πρέπει :

$\Delta>0\Leftrightarrow\left[-4(1+\lambda)\right]^2-4\cdot1\cdot(4+3\lambda)>0\Leftrightarrow16(1+2\lambda+\lambda^2)-16-12\lambda>0\Leftrightarrow$

$\cancel{16}+32\lambda+16\lambda^2\cancel{-16}-12\lambda>0\Leftrightarrow16\lambda^2+20\lambda>0\Leftrightarrow4\lambda(4\lambda+5)>0$

Άρα $\lambda<-\frac{5}{4}$ ή $\lambda>0$

γ) i) $S=x_1+x_2=4(1+\lambda)$, $P=x_1x_2=4+3\lambda$

ii) $A=(4x_1-3)(4x_2-3)=16x_1x_2-12x_1-12x_2+9=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9=$

$16(4+3\lambda)-12\cdot4\cdot(1+\lambda)+9=64\cancel{+48\lambda}-48\cancel{-48\lambda}+9=25$

1455. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 10)**

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; **(Μονάδες 6)**

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(1-2\lambda)^2\geq0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$..

β) Θα πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2=0\Leftrightarrow1-2\lambda=0\Leftrightarrow2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

γ) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε $S=x_1+x_2=1$, $P=x_1\cdot x_2=\lambda-\lambda^2$

$d(x_1,x_2)>0\Leftrightarrow|x_1-x_2|>0\Leftrightarrow x_1\neq x_2\Leftrightarrow\lambda\neq\frac{1}{2}$(β ερώτημα) (1)

$d(x_1,x_2)<2\Leftrightarrow|x_1-x_2|<2\Leftrightarrow|x_1-x_2|^2<4\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2<4\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-2x_1x_2<4\Leftrightarrow$

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2<4\Leftrightarrow1-4(\lambda-\lambda^2)<4\Leftrightarrow1-4\lambda+4\lambda^2-4<0\Leftrightarrow4\lambda^2-4\lambda-3<0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4\lambda^2-4\lambda-3$ είναι: $\Delta=(-4)^2-4\cdot4\cdot(-3)=16+48=64=8^2$ και οι ρίζες του

$x_1=\frac{4+8}{2\cdot4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ και $x_2=\frac{4-8}{2\cdot4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

λ	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4\lambda^2-4\lambda-3$		+	0	-	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης $4\lambda^2-4\lambda-3<0$ είναι το διάστημα : $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

Επειδή $\lambda\neq\frac{1}{2}$ οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$ είναι οι $\lambda\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

1458.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ (Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2),f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),f(x_2+1)$ (Μονάδες 5)

Λύση

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(1-2\lambda)^2\geq0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Θα πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2=0\Leftrightarrow1-2\lambda=0\Leftrightarrow2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

γ) i) $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2\overset{(\cdot2)}{\Leftrightarrow}2x_1<x_1+x_2<2x_2$

$2x_1<x_1+x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$ ισχύει

$x_1+x_2<2x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$ ισχύει

ii) Επειδή $\alpha=1>0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1+x_2}{2}$		x_2		x_2+1		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0		−		0		+		

Επομένως $f(x_1)=0$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$, $f(x_2+1)>0$. Άρα $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_2)<f(x_2+1)$

1461.Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda>2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1+4x_2 \geq 4$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Για να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει
$\Delta>0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot 1>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4>0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow \lambda>2$ ή $\lambda<-2$

β) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε : $P=x_1\cdot x_2=1 \overset{x_1=\rho}{\Leftrightarrow} \rho\cdot x_2=1 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{1}{\rho}$

γ) i) $P=x_1\cdot x_2=1>0$ άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημοι αριθμοί.
$S=x_1+x_2=\lambda>2>0$ άρα οι ρίζες x_1, x_2 θετικοί αριθμοί.

ii) Από ερώτημα (β) $x_2=\dfrac{1}{\rho}$ άρα :

$x_1+4x_2\geq 4 \Leftrightarrow \rho+4\cdot\dfrac{1}{\rho}\geq 4 \overset{(\cdot x_1)}{\Leftrightarrow} \rho^2+4\geq 4\rho \Leftrightarrow \rho^2-4\rho+4\geq 0 \Leftrightarrow (\rho-2)^2\geq 0$ το οποίο ισχύει.

1462.Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma=2\alpha$ και $\beta=-3\alpha$. **(Μονάδες 9)**

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1,2)$,τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha<0$. **(Μονάδες 9)**

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε : $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1+2=-\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta=-3\alpha$

και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2=\dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma=2\alpha$

β) i) Αν $\alpha>0$ τότε το τριώνυμο θα είχε αρνητικές τιμές εντός των ριζών, δηλαδή στο (1,2), άρα $\alpha<0$

ii) $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0 \overset{(\alpha\ \text{ερώτημα})}{\Leftrightarrow} 2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha<0 \overset{(:\alpha<0)}{\Leftrightarrow} 2x^2-3x+1>0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1 -\infty$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1=\dfrac{3+1}{2\cdot 2}=\dfrac{4}{4}=1$ και $x_2=\dfrac{3-1}{2\cdot 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$	+		−		+	

Οι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1>0$ είναι η ένωση των διαστημάτων : $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

1465.Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. **(Μονάδες 10)**

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha<x_1<x_2<\beta$,να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta=\kappa^2-4\cdot3\cdot(-4)=\kappa^2+48>0$.Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) $P=x_1\cdot x_2=-\dfrac{4}{3}<0$.Άρα έχει ρίζες ετερόσημες

γ)

x	$-\infty$ α x_1		x_2 β $+\infty$
$3x^2+\kappa x-4$	+	-	+

Έχουμε: $\alpha<x_1<0,\beta>x_2>0$ ($x_1<0, x_2>0$ από β ερώτημα)

Από τον πίνακα προσήμου έχουμε $f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0$. Άρα $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)<0$

1480.Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2) .

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). **(Μονάδες 10)**

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1,\ x_1=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2,\ x_2=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

β) Αν στην εξίσωση (2) θέσουμε $\omega=x^2\geq0$ (3), προκύπτει η εξίσωση $\omega^2-3\omega+2=0$ με ρίζες τους αριθμούς 1,2.

Από την (3) $\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$ ή $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

γ) 1) Αν έχει διπλή ρίζα αυτή θα ανήκει στο σύνολο $\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\}$

- Αν έχει διπλή ρίζα το 1 τότε έχουμε το τριώνυμο $(x-1)^2$ (Για οποιαδήποτε τιμή $\neq1$ παίρνει θετικές τιμές).
- Αν έχει διπλή το ρίζα το $\sqrt{2}$ τότε έχουμε το τριώνυμο $(x-\sqrt{2})^2$ (Για οποιαδήποτε τιμή $\neq\sqrt{2}$ παίρνει θετικές τιμές).
- Δεν μπορεί να έχει διπλή ρίζα αρνητικό αριθμό γιατί τότε για αυτή τη ρίζα θα είχε μηδενική τιμή και δεν θα έχει θετική τιμή για κάθε αρνητικό αριθμό x.

2) Αν έχει ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες επειδή $\alpha>0$ θα έχουμε

x	$-\infty$ x_1		x_2 $+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$	+	−	+

Αν αρνητικός αριθμός ,τότε στο διάστημα (x_1, x_2) θα υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί για τις οποίες το τριώνυμο θα παίρνει αρνητικές τιμές άτοπο. Άρα οι ρίζες θα πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί.

Επειδή είναι και ρίζες της εξίσωσης (2) θα είναι οι αριθμοί 1 και $\sqrt{2}$

Από τις σχέσεις Vieta $S = x_1 + x_2 = -\beta = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta = -1-\sqrt{2}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \gamma = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Άρα το ζητούμενο τριώνυμο είναι το $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$.

1481.Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν β= 0 (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2$

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τότε $\Delta < 0$.Επομένως $x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Όταν $\beta = 0$ τότε το τριώνυμο γίνεται $x^2 + \beta x + \beta^2 = x^2$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν $\alpha \neq 0$ τότε το τριώνυμο ως προς β : $\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 > 0$ από (β(i) ερώτημα)

Αν $\beta \neq 0$ τότε το τριώνυμο ως προς β : $\alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 > 0$ από (β(i) ερώτημα)

Άρα η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

1483.Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 10)

β) Αν $k = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι ρίζες είναι οι αριθμοί -2,4.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	-	0	+	

β) $k = -\dfrac{8889}{4444} < -2 \Leftrightarrow 8889 > 8888$ ισχύει. Άρα $\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$ από τον πίνακα προσήμων.

γ) $-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4$.Άρα $0 < |\mu| < 4$

Από την παράσταση $\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$ για $|\mu| = x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο ,το οποίο για $0 < x < 4$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση $\mu^2 - 2|\mu| - 8$.

1486.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-3)=36-4\lambda+12=48-4\lambda$.

β) Θα πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow48-4\lambda>0\Leftrightarrow4\lambda<48\Leftrightarrow\lambda<12$.

γ)i) Επειδή $\lambda<12$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
$P=x_1\cdot x_2=\lambda-3>0$.Άρα έχει ρίζες ομόσημες. $S=x_1+x_2=6>0$. Άρα έχει ρίζες θετικές .

ii)

x	-∞	κ	x_1	μ	x_2	+∞
$f(x)$		+	0	-	0	+

Έχουμε : $\kappa<0,\ \mu>x_1>0$ ($x_1>0$, από γ)i) ερώτημα)
Από τον πίνακα προσήμου έχουμε $f(\kappa)>0,\ \ f(\mu)<0$.Άρα $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)>0$

1487.α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $\Delta=9^2-4\cdot1\cdot18=81-72=9$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι :
$x_1=\frac{-9+3}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ και $x_2=\frac{-9-3}{2}=\frac{-12}{2}=-6$

ii) $|x+3|+|x^2+9x+18|=0\Leftrightarrow x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ και $x^2+9x+18\Leftrightarrow x=-3$ ή -6

β)i)Τοπρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα :

x	$-\infty$	-6		-3		$+\infty$
$x^2+9x+18$	+	0	$-$	0	+	

ii) Για να ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$ πρέπει $x^2+9x+18\le0\Leftrightarrow x\in[-6,-3]$

1494.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49=7^2$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-5x-6 είναι: $x_1=\frac{5+7}{2}=\frac{12}{2}=6$ και $x_2=\frac{5-7}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Τοπρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα :

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		+	0	-	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $x\in(-1,6)$

β) $-\frac{46}{47}>-1\Leftrightarrow 46<47$ και $-\frac{46}{47}<6$.Ο αριθμός $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ είναι η τιμή του τριωνύμου x^2-5x-6 για $x=-\frac{46}{47}$.Άρα $K<0$.

γ) $\alpha\in(-6,6)\Leftrightarrow -6<\alpha<6\Leftrightarrow|\alpha|<6$.Άρα $0\le|\alpha|<6$

Από την παράσταση $\alpha^2-5|\alpha|-6=|\alpha|^2-5|\alpha|-6$ για $|\alpha|=x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο ,το οποίο για $0\le x<6$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση Λ.

1500.Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. **(Μονάδες 7)**
β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. **(Μονάδες 2)**
ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 4)**
γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1)έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. **(Μονάδες 8)**
ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 4)**

Λύση

α) Για να έχει το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες πρέπει :
$\Delta\ge0\Leftrightarrow(-6)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-7)\ge0\Leftrightarrow 36-4\lambda+28\ge0\Leftrightarrow 4\lambda\le64\Leftrightarrow\lambda\le16$

β)i) $S=x_1+x_2=6$ και $P=x_1\cdot x_2=\lambda-7\Leftrightarrow\lambda=P+7$

ii) Αφού $\lambda<16\Leftrightarrow\Delta>0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και επειδή $\lambda>7\Leftrightarrow\lambda-7>0\Leftrightarrow P>0$ οι ρίζες αυτές είναι ομόσημες.
Το άθροισμα Sτων ριζών είναι θετικός αριθμός. Επομένως οι ρίζες έχουν θετικό πρόσημο.

γ) i) $x^2-6|x|+\lambda=7\Leftrightarrow|x|^2-6|x|+\lambda-7=0$ (1)

Αν θέσουμε $|x|=\omega$ (2) ,τότε προκύπτει το αρχικό τριώνυμο. Το οποίο έχει δύο θετικές ρίζες ω_1 και ω_2 όταν $7<\lambda<16$.Τότε $|x|=\omega_1 \Leftrightarrow x=\pm\omega_1$ και $|x|=\omega_2 \Leftrightarrow x=\pm\omega_2$ δηλαδή τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες.

ii) Θα πρέπει $7<3\sqrt{10}<16 \Leftrightarrow 49<90<256$ ισχύει.

1511.Δίνεται η ανίσωση: $|x+1|<4$ (1)

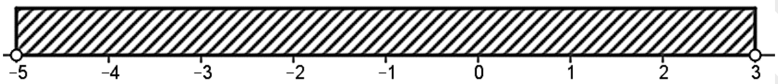
α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\le 0$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $|x+1|<4 \Leftrightarrow -4<x+1<4 \Leftrightarrow -5<x<3 \Leftrightarrow x\in(-5,3)$



β) Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $(-5,3)$ είναι οι -4,-3,-2,-1,0,1,2

γ) το τριώνυμο $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικό για κάθε $x\le 0$ και άρα $f(0)=\gamma>0$.

Αλλά από τους τύπους του Vieta για τις ρίζες του τριωνύμου x_1,x_2 έχουμε $P=x_1\cdot x_2=\gamma>0$ συνεπώς οι ρίζες που θα επιλέξουμε θα πρέπει να είναι ομόσημες (αυτόματα αποκλείεται η τιμή 0).

Δεν γίνεται να είναι οι ρίζες ίσες και αρνητικές γιατί τότε το τριώνυμο θα γίνεται μηδέν όταν η τιμή του x ταυτιστεί με την ρίζα αυτή.

Εξετάζουμε τώρα αν γίνεται να είναι ρίζες δύο διακεκριμένες αρνητικές τιμές του $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$.

Σε τέτοια περίπτωση, ισχύει ότι και προηγουμένως δηλαδή το τριώνυμο θα μηδενίζεται όταν η τιμή του x ταυτιστεί με μια από τις ρίζες .(Επί πλέον δε οι τιμές του τριωνύμου ανάμεσα στις ρίζες αυτές θα είναι ετερόσημες του $\alpha=1>0$ που πάλι έρχεται σε αντίφαση με τις προϋποθέσεις της άσκησης).

Μετά από τα παραπάνω το τριώνυμο θα έχει για ρίζες είτε τις δύο διακεκριμένες θετικές τιμές του συνόλου Α , δηλαδή τις $x_1=1$ και $x_2=2$

Οπότε θα έχουμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+2$. Είτε διπλή κάθε μια απ' αυτές και πράγματι τότε $f(x)=(x-1)^2$ ή $f(x)=(x-2)^2$ που είναι θετικό για κάθε $x\le 0$.

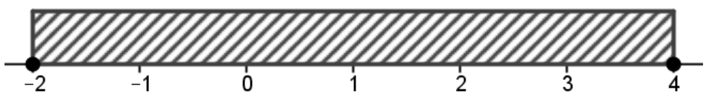
1512.Δίνεται η ανίσωση: $|x-1|\le 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\ge 0$. (Μονάδες 15)

Λύση



α) $|x-1|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-1\le 3 \Leftrightarrow -2\le x\le 4 \Leftrightarrow x\in[-2,4]$

β) Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα [-2,4] είναι οι -2,-1,0,1,2,3,4

γ) το τριώνυμο $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικό για κάθε $x\ge 0$ και άρα $f(0)=\gamma>0$.

Αλλά από τους τύπους του Vietta για τις ρίζες του τριωνύμου x_1,x_2 έχουμε $P=x_1\cdot x_2=\gamma>0$ συνεπώς οι ρίζες που θα επιλέξουμε θα πρέπει να είναι ομόσημες (αυτόματα αποκλείεται η τιμή 0).
Δεν γίνεται να είναι οι ρίζες ίσες και θετικές γιατί τότε το τριώνυμο θα γίνεται μηδέν όταν η τιμή του x ταυτιστεί με την ρίζα αυτή. Εξετάζουμε τώρα αν γίνεται να είναι ρίζες δύο διακεκριμένες θετικές τιμές του $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

Σε τέτοια περίπτωση, ισχύει ότι και προηγουμένως δηλαδή το τριώνυμο θα μηδενίζεται όταν η τιμή του x ταυτιστεί με μια από τις ρίζες .(Επί πλέον δε οι τιμές του τριωνύμου ανάμεσα στις ρίζες αυτές θα είναι ετερόσημες του $\alpha=1>0$ που πάλι έρχεται σε αντίφαση με τις προϋποθέσεις της άσκησης).
Μετά από τα παραπάνω το τριώνυμο θα έχει για ρίζες είτε τις δύο διακεκριμένες αρνητικές τιμές του συνόλου Α , δηλαδή τις $x_1=-1$ και $x_2=-2$.Οπότε θα έχουμε το τριώνυμο $f(x)=x^2+3x+2$
Είτε διπλή κάθε μια απ' αυτές και πράγματι τότε $f(x)=(x+1)^2$ ή $f(x)=(x+2)^2$ που είναι θετικό για κάθε $x\ge 0$.

1513.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x. **(Μονάδες 10)**

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$ **(Μονάδες 7)**

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2+2|\alpha|+3$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16=4^2$.Οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$ είναι:

$$x_1=\frac{-2+4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1 \text{ και } x_2=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

β) Είναι $-1<2{,}999<3$, άρα $f(2{,}999)>0$ και $-1{,}002\in(-\infty,-1)$.
Άρα $f(-1{,}002)<0$ (όπως φαίνεται από τον πίνακα προσήμων). Επομένως $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$.

γ) $-3<\alpha<3 \Leftrightarrow |\alpha|<3$.Άρα $0\le|\alpha|<3$

Από την παράσταση $-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3$ για $|\alpha|=x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο ,το οποίο για $0\le x<3$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

1517.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\ge\frac{5}{2}x$ (1) **(Μονάδες 10)**

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ. **(Μονάδες 8)**

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\ge\frac{3}{2}$ **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $x^2+1\ge\frac{5}{2}x \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 2x^2+2\ge 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0$

β) $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9=3^2$

Οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$ είναι: $x_1=\frac{5+3}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{5-3}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Τοπρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		+	0	−	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

β) Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$, οι αριθμοί $\lambda-1$, $\kappa-1$ είναι ετερόσημοι.

Έστω $\lambda-1<0\Leftrightarrow\lambda<1$ και $\kappa-1>0\Leftrightarrow\kappa>1$. Τότε $\lambda<1<\kappa$.

Αν $\lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda>1$ και $\kappa-1<0\Leftrightarrow\kappa<1$. Τότε $\kappa<1<\lambda$, άρα σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

γ) Αν $\lambda<1<\kappa$ και κ, λ λύσεις της ανίσωσης τότε : $\lambda\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\lambda\ge-\frac{1}{2}$ (1) και $\kappa\ge 2$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε : $\kappa-\lambda\ge-\frac{1}{2}+2\Leftrightarrow\kappa-\lambda\ge\frac{3}{2}$

Αν $\kappa<1<\lambda$ και κ, λ λύσεις της ανίσωσης τότε : $\kappa\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\kappa\ge-\frac{1}{2}$ (1) και $\lambda\ge 2$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε : $\lambda-\kappa\ge-\frac{1}{2}+2\Leftrightarrow\lambda-\kappa\ge\frac{3}{2}$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $|\kappa-\lambda|\ge\frac{3}{2}$.

1518.Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α. (Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $|\alpha-2|<1\Leftrightarrow-1<\alpha-2<1\Leftrightarrow 1<\alpha<3\Leftrightarrow\alpha\in(1,3)$

β) i) $\Delta=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\alpha^2-4\alpha+4-1=\alpha^2-4\alpha+3$

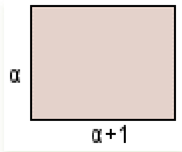
Οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha^2-4\alpha+3$ είναι το 1 και το 3.Τοπρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα:

α	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\alpha^2-4\alpha+3$		+	0	−	0	+	

ii) Επειδή $\alpha\in(1,3)$ είναι $\Delta<0$ και $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$ για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

1520.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+x-6<0$. **(Μονάδες 8)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$. **(Μονάδες 5)**



γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α + 1όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$ **(Μονάδες 7)**

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Οι ρίζες είναι οι αριθμοί -3 και 2

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
x^2-x-6	+	0	−	0	+

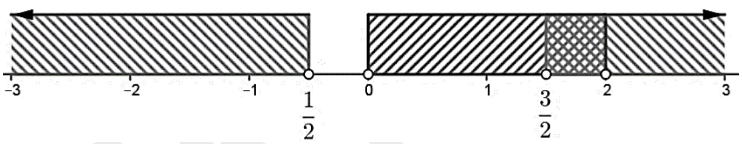
Η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα (-3,2)

β) $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}>1 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}\right)$ ή $\left(x-\frac{1}{2}<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}\right)$. Άρα $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

γ)i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$

Άρα $E<6 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha<6 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-6<0 \overset{(\alpha\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha)}{\Leftrightarrow} \alpha\in(-3,2)$. Επειδή $\alpha>0$ είναι $\alpha\in(0,2)$

Επίσης $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1 \Leftrightarrow \alpha\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$



Άρα $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii) Έστω Π η περίμετρος του ορθογωνίου. Τότε $\Pi=2\alpha+2(\alpha+1)=2\alpha+2\alpha+2=4\alpha+2$

Έχουμε $\frac{3}{2}<\alpha<2 \overset{(\cdot 4)}{\Leftrightarrow} 6<4\alpha<8 \overset{(+2)}{\Leftrightarrow} 8<4\alpha+2<10 \Leftrightarrow 8<\Pi<10 \Leftrightarrow \Pi\in(8,10)$

1522.

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. **(Μονάδες 10)**

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Οι ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και 2

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

β) Είναι $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0$, όταν οι αριθμοί $\alpha^2-3\alpha+2$ και $\beta^2-3\beta+2$ είναι ετερόσημοι.

Αν $\alpha^2-3\alpha+2<0 \Leftrightarrow 1<\alpha<2$ και $\beta^2-3\beta+2>0 \Leftrightarrow \beta<1$ ή $\beta>2$

Τότε $\alpha-1>0$ και $\beta-2>0$ $(\alpha<\beta)$.Επομένως $(\alpha-1)(\beta-2)>0 \Rightarrow |(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$

Αν $\alpha^2-3\alpha+2>0 \Leftrightarrow \alpha<1$ ή $\alpha>2$ και $\beta^2-3\beta+2<0 \Leftrightarrow 1<\beta<2$, τότε

$\alpha-1<0$ $(\alpha<\beta)$ και $\beta-2<0$ $(\alpha<\beta)$.

Επομένως $(\alpha-1)(\beta-2)>0 \Rightarrow |(\alpha-1)(\beta-2)| = (\alpha-1)(\beta-2)$.

13176.Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$. (Μονάδες 8)

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 5)

Λύση

α) $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει διακρίνουσα

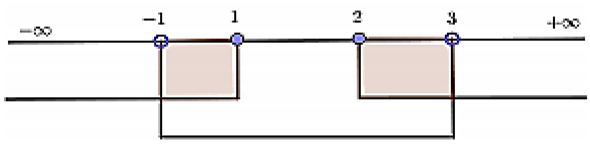
$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1$ και $x_1=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Επομένως $x^2-3x+2\geq0 \Leftrightarrow x\leq1$ ή $x\geq2$.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, προκύπτει ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$



γ) i. $-1<\rho_1\leq1$ (1), $-1<\rho_2\leq1 \Leftrightarrow -3<3\rho_2\leq3$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$-4<\rho_1+3\rho_2\leq4 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}\leq\dfrac{4}{4} \Leftrightarrow -1<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}\leq1$, άρα ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.

ii. $-1<\rho_1\leq1$ (1), $2\leq\rho_2<3 \Leftrightarrow 6\leq3\rho_2<9$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$-5<\rho_1+3\rho_2<10 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{10}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$, άρα ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο όταν περιέχεται στην ένωση των διαστημάτων $(-1,1]\cup\left[2,\dfrac{5}{2}\right)$.

13174. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $B=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B; **(Μονάδες 8)**

β) Να δείξετε ότι $A=3-|x|$ και $B=|x|-2$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B-A<2d(x,4)-5$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η παράσταση A ορίζεται όταν $|x|-1\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Η παράσταση B ορίζεται όταν $|x|-2\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 2 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

β) $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}=-\dfrac{|x|^2-4|x|+3}{|x|-1}$

Το τριώνυμο $\omega^2-4\omega+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4$ και ρίζες $\omega_1=1,\ \omega_2=3$, οπότε

$\omega^2-4\omega+3=(\omega-1)(\omega-3)$, άρα $A=-\dfrac{|x|^2-4|x|+3}{|x|-1}=-\dfrac{\cancel{(|x|-1)}(|x|-3)}{\cancel{|x|-1}}=3-|x|$ και

$B=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}=\dfrac{(|x|-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{|x|-2}}=|x|-2$

γ) $B-A<2d(x,4)-5 \Leftrightarrow |x|-2-(3-|x|)<2|x-4|-5 \Leftrightarrow$

$|x|-2-3+|x|<2|x-4|-5 \Leftrightarrow \cancel{2}|x|<\cancel{2}|x-4| \Leftrightarrow x^2<(x-4)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}<\cancel{x^2}-8x+16 \Leftrightarrow 8x<16 \Leftrightarrow x<2$

Για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x\neq\pm 1$ και $x\neq\pm 2$, οπότε τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$

Πρόοδοι

Ακολουθίες

4ο Θέμα

13056.Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

·	· · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)
β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)
γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι $T_{10} = \dfrac{10\cdot(10+1)}{2} = \dfrac{110}{2} = 55$.

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu = 120 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \nu^2+\nu = 240 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-240 = 0$$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4\cdot1\cdot(-240) = 961$ και ρίζες

$$\nu_1 = \frac{-1+\sqrt{961}}{2} = \frac{-1+31}{2} = 15,$$

$\nu_2 = \dfrac{-1-\sqrt{961}}{2} = \dfrac{-1-31}{2} = -16$ που απορρίπτεται αφού ο ν είναι φυσικός αριθμός.

γ) Έστω $T_\nu, T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)+(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+\nu+2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)(2\nu+2)}{2} = \frac{(\nu+1)\cdot\cancel{2}(\nu+1)}{\cancel{2}} = (\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος

2ο θέμα

1240.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0$ (1), $\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4$ (2)

Από $(2)-(1) \Rightarrow \cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - \omega = 4 - 0 \Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ (3)

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = -2 + (\nu-1)\cdot 2 = -2 + 2\nu - 2 = 2\nu - 4$

$\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$

1245.α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x+2, (x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x=1$ ii) $x=-1$. (Μονάδες 12)

Λύση

α)Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει (2β=α+γ)

$2(x+1)^2 = x+2+3x+2 \Leftrightarrow 2x^2 + \cancel{4x} + 2 = \cancel{4x} + 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

β) i) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $x+2=3, (x+1)^2 = 4, 3x+2=5$

Τότε $\omega = 4-3 = 1$.

ii) Για $x=-1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι

$x+2=1, (x+1)^2 = 0, 3x+2=-1$, τότε $\omega = 0-1 = -1$

1247.Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_ν),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων , α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 20. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 20$ και $\alpha_1 = 120$. Το πλήθος των καθισμάτων της ν- οστής σειράς είναι:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 + (\nu-1)\cdot 20 = 120 + 20\nu - 20 = 100 + 20\nu$

β) $\alpha_{10} = 100 + 20\cdot 10 = 100 + 200 = 300$

γ) $S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 5(2\cdot 120 + 9\cdot 20) = 5(240+180) = 5\cdot 420 = 2100$

1249.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20} . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 5\omega = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β) $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=19+19\cdot 6=19+114=133$

γ) $S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\alpha_1+19\omega\right)=10(2\cdot 19+19\cdot 6)=10\cdot(38+114)=10\cdot 152=1520$

1256. Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).
α) Να βρείτε τη τιμή του x. **(Μονάδες 10)**
β) Αν $x=1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),
i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. **(Μονάδες 7)**
ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει
$2B=A+\Gamma \Leftrightarrow 2(x+4)=1+x+8 \Leftrightarrow 2x\cancel{+8}=1+x\cancel{+8} \Leftrightarrow x=1$

β) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $A=\alpha_1=1$, $B=5$ και $\Gamma=9$.
i) Τότε $\omega=B-A=5-1=4$
ii) $\alpha_{20}=\alpha_1+19\nu=1+19\cdot 4=1+76=77$

1266. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+\left(\beta^2-4\right)=0$, (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$ **(Μονάδες 12)**
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\Delta=(-2\beta)^2-4\cdot 1\cdot(\beta^2-4)=\cancel{4\beta^2}\cancel{-4\beta^2}+16=16=4^2$

$x_1=\frac{2\beta+4}{2}=\frac{\cancel{2}(\beta+2)}{\cancel{2}}=\beta+2$ και $x_2=\frac{2\beta-4}{2}=\frac{\cancel{2}(\beta-2)}{\cancel{2}}=\beta-2$

β) οι αριθμοί x_1, β, x_2, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν:
$2\beta=x_1+x_2 \Leftrightarrow 2\beta=\beta\cancel{+2}+\beta\cancel{-2} \Leftrightarrow 2\beta=2\beta$ ισχύει

1282. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4-\alpha_2=10$.
α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$. **(Μονάδες 12)**
β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\alpha_4-\alpha_2=10 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega-(\alpha_1+\omega)=10 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1}+3\omega\cancel{-\alpha_1}-\omega=10 \Leftrightarrow 2\omega=10 \Leftrightarrow \omega=5$

β) $S_3=33 \Leftrightarrow \frac{3}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1+\cancel{2}\omega\right)=33 \Leftrightarrow 3\cdot(\alpha_1+5)=33 \overset{(:3)}{\Leftrightarrow} \alpha_1+5=11 \Leftrightarrow \alpha_1=6$

1292.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\omega \Leftrightarrow 8 = 2\omega \Leftrightarrow \omega = 4$

β) $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega > 30 \Leftrightarrow 1 + (\nu-1)\cdot 4 > 30 \Leftrightarrow 1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow 4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4} > 8$

Άρα ο μικρότερος θετικός ακέραιος είναι ο αριθμός 9.

1325.Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 24\omega = \cancel{\alpha_1} + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + (\nu-1)\cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$

$2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = \frac{153}{3} = 51$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος είναι ίσος με 152.

1326.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$ (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{15} - \alpha_9 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 2[\alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 6\omega)] \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha_1} + 14\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 2(\cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega) \Leftrightarrow 6\omega = 2\cdot 3\omega \Leftrightarrow 6\omega = 6\omega$ ισχύει

β) $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2\ (1)$, $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18\ (2)$

Από την $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{18}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow 18 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} 9 = \alpha_{10} - \alpha_7 \Leftrightarrow 9 = \cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega \Leftrightarrow 9 = 3\omega \Leftrightarrow \omega = 3$

1328. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 15 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 15 \Leftrightarrow -5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = -3$

β) $\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = \nu \Leftrightarrow 41 + (\nu-1)(-3) = \nu \Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow 4\nu = 44 \Leftrightarrow \nu = 11$

1329.Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. **(Μονάδες 12)**

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow$
$2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β) $S_\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right) = 0 \overset{\nu \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \cdot (-10) + (\nu-1)4 = 0 \Leftrightarrow -20 + 4\nu - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow \nu = 6$

Επομένως θα πρέπει να προσθέσουμε τους έξι πρώτους όρους

1336.Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :
$2(5x+2) = x \cancel{+6} + 11x \cancel{-6} \Leftrightarrow 10x + 4 = 12x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
Άρα οι αριθμοί που δίνονται είναι οι 8,12,16 και $\omega = 12 - 8 = 4$.

β) $S_8 = \frac{8}{2}\left(2\alpha_1 + 7\omega\right) = 4 \cdot (0 + 7 \cdot 4) = 4 \cdot 28 = 112$

1343.Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. **(Μονάδες 13)**

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

Λύση

α) $\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right) = 77 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} \nu(2 \cdot 2 + (\nu-1) \cdot 3) = 154 \Leftrightarrow$
$\nu(4 + 3\nu - 3) = 154 \Leftrightarrow \nu(3\nu + 1) - 154 = 0 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1848 = 1849$

Άρα $\nu = \frac{-1+\sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1+43}{6} = \frac{42}{6} = 7$ ή

$\nu = \frac{-1-\sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1-43}{6} = \frac{-44}{6} = -\frac{22}{3} < 0$ απορρίπτεται

1344.Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών:1, 3, 5, 7, …
α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. **(Μονάδες 15)**
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2.Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και $\omega=2$.
$\alpha_{100}=\alpha_1+99\omega=1+99\cdot 2=199$

β) $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)=\frac{\nu}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\cdot 1+(\nu-1)\cdot\cancel{2}\right)=\nu(\cancel{1}+\nu\cancel{-1})=\nu\cdot\nu=\nu^2$

1347.Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.
α)Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. **(Μονάδες 12)**
β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_ν),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων ,α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού α. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά α.

β) $\alpha_7=36\Leftrightarrow\alpha_1+6\alpha=36\Leftrightarrow\alpha_1=36-6\alpha\ (1)$

$S_{10}=300\Leftrightarrow\frac{10}{2}\left(2\alpha_1+9\alpha\right)=300\Leftrightarrow 5\left(2\alpha_1+9\alpha\right)=300\overset{(:5)}{\Leftrightarrow}2\alpha_1+9\alpha=60\ (2)$

$(2)\overset{(1)}{\Rightarrow}2(36-6\alpha)+9\alpha=60\Leftrightarrow 72-12\alpha+9\alpha=60\Leftrightarrow-3\alpha=-12\Leftrightarrow\alpha=4\ (3)$

$(1)\overset{(3)}{\Rightarrow}\alpha_1=36-6\cdot 4=12$

Άρα η πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα (α_1)
η δεύτερη σειρά έχει 12+4 =16 καθίσματα(α_2)
η τρίτη σειρά έχει 16+4=20 καθίσματα(α_3)
η τέταρτη σειρά έχει 20+4=24 καθίσματα(α_4)
η πέμπτη σειρά έχει 24+4=28 καθίσματα(α_5)
η έκτη σειρά έχει 28+4=32 καθίσματα(α_6)
η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα(α_7)
η όγδοη σειρά έχει 36+4=40 καθίσματα(α_8)
η ένατη σειρά έχει 40+4=44 καθίσματα(α_9)
η δέκατη σειρά έχει 44+4=48 καθίσματα(α_{10})

1370.α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων1,2,3,…ν **(Μονάδες 12)**
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. **(Μονάδες13)**

Λύση

α) Έχουμε την ακολουθία $\alpha_\nu=\nu$ και $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\nu+1-\nu=1$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και $\omega=1$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega\right) = \frac{\nu}{2}\left(2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1\right) = \frac{\nu}{2}\left(2+\nu-1\right) = \frac{\nu}{2}\left(1+\nu\right) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

β) $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \nu^2+\nu = 90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$, $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90)+360 = 361 = 19^2$

$\nu = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ή $\nu = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10$ απορρίπτεται (ν>0)

4ο θέμα

1387.Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων .
Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Άρα αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_ν) με α_1=16 καθίσματα και διαφορά ω που είναι ο αριθμός κατά τον οποίο αυξάνεται μία σειρά σε σχέση με την προηγούμενη της. Η 7η σειρά είναι ο
$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 16+6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + (\nu-1)\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16+2\nu-2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu+14$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}\left(2a_1 + 19\omega\right) = 10\cdot\left(2\cdot 16 + 19\cdot 2\right) = 10\cdot(32+38) = 10\cdot 70 = 700$ καθίσματα

δ) Το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου γιατί κάθε σειρά έχει 3 περισσότερα καθίσματα από την προηγούμενη της.
Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (β_ν) του πλήθους των κενών καθισμάτων κάθε σειράς με πρώτο όρο $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$ καθίσματα

i) $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega' = 6 + (\nu-1)\cdot 3 = 6+3\nu-3 = 3\nu+3$
Ισχύει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 3\nu+3 \le 2\nu+14 \Leftrightarrow \nu \le 11$
Το πλήθος των κενών καθισμάτων δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των καθισμάτων της ίδιας σειράς.
Θα υπάρχουν κενά καθίσματα από την 11η σειρά και πάνω ($\nu = 11 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu$)

ii) Αν S'_{10} το σύνολο των κενών καθισμάτων των πρώτων 10 σειρών της αίθουσας τότε :

$S'_{10} = \frac{10}{2}\left(2\beta_1 + 9\omega'\right) = 5\cdot(2\cdot 6 + 9\cdot 3) = 5\cdot(12+27) = 195$ καθίσματα

$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\alpha_1 + 9\omega\right) = 5\cdot(2\cdot 16 + 9\cdot 2) = 5\cdot(32+18) = 250$ καθίσματα

Οι θεατές βρίσκονται από τη διαφορά $S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$ θεατές

1395.Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των21€ανάεισιτήριο,τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει51θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€καικάθεεπόμενοςεπιβάτηςθαπληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.
α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)
β) Αν για κάθε ν≤51 ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί α_1, α_2,…,α_{51}είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (Μονάδες6)
γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.
(Μονάδες7)
δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.
(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201}=101$) (Μονάδες8)

Λύση

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3+0,5=3,5€
ο τρίτος επιβάτης θα πληρώσει 3,5+0,5=4€
ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσει 4+0,5=4,5€

β) Επειδή το ποσό που πληρώνει κάθε επιβάτης είναι κατά 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με α_1=3€ και διαφορά ω=0,5€

γ) Το ποσό πουθαπληρώσειο51^{ος} επιβάτης είναι $\alpha_{51}=\alpha_1+50\omega=3+50\cdot 0,5=28$€

δ) Έστω ότι πρέπει να πουλήσει ν εισιτήρια .Τότε η είσπραξη θα είναι Σ_ν €.

$$\text{Οπότε}: \Sigma_\nu>30\cdot 21 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]>630\ \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5\right]>630 \overset{(\cdot 4)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\nu\cdot(6+0,5\nu-0,5)>2520 \Leftrightarrow 12\nu+\nu^2-\nu-2520>0 \Leftrightarrow \nu^2+11\nu-2520>0\ (1)$$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta=11^2-4\cdot 1\cdot(-2520)=121+10080=10201$

Έχει ρίζες : $\nu=\dfrac{-11+\sqrt{10201}}{2}=\dfrac{-11+101}{2}=\dfrac{90}{2}=45$ και

$$\nu=\frac{-11-\sqrt{10201}}{2}=\frac{-11-101}{2}=\frac{-112}{2}=-56$$

Από την (1) $\Rightarrow(\nu+45)(\nu-56)>0 \overset{\nu+45>0}{\Leftrightarrow} \nu-56>0 \Leftrightarrow \nu>56$

Θα πρέπει να βγάλει τουλάχιστον 57 εισιτήρια αδύνατον αφού το λεωφορείο έχει 51 θέσεις

1399. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) ,όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: α_1=x, $\alpha_2=2x^2-3x-4$, $\alpha_3=x^2-2$,όπου $x\in\mathbb{Z}$, τότε :
α) να αποδειχθεί ότι x=3. (Μονάδες10)
β)να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . (Μονάδες 8)
γ) να υπολογιστεί το άθροισμα S=α_1+α_3+α_5+ ...+α_{15}. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή α_1,α_2,α_3 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$$2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2-3x-4)=x+x^2-2 \Leftrightarrow 4x^2-6x-8-x-x^2+2=0 \Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0$$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta=(-7)^2-4\cdot 3\cdot(-6)=49+72=121=11^2$

Οι ρίζες είναι : $x_1 = \frac{7+11}{2\cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$, $x_2 = \frac{7-11}{2\cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin Z$ απορρίπτεται

Επομένως x=3.

β) $\alpha_1=3, \alpha_2=5$, $\alpha_3=7$ και $\omega=\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 3 + (\nu-1)\cdot 2 = 3 + 2\nu - 2 = 2\nu + 1$

$\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow 2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow 2\nu = 2013$ άτοπο (άρτιος =περιττός)

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδουπουναισούταιμε2014

γ) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, ..., \alpha_{15} = 3, 7, 11, ..., 31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος β_ν ,με $\beta_1=\alpha_1=3$,($\beta_2=7$) και $\omega' = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = 7 - 3 = 4$

$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega' \Leftrightarrow \alpha_{15} = 3 + (\nu-1)\cdot 4 \Leftrightarrow 31 = 3 + 4\nu - 4 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$

$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15} = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{8}{2}\cdot(\beta_1 + \beta_8) \Leftrightarrow S_8 = 4\cdot(3+31) \Leftrightarrow S_8 = 4\cdot 34 = 136$

Άρα S=136

1411.Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3ηκυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

Λύση

α) Κάθε κυψέλη απέχει από την προηγούμενη απόσταση 3.Άρα οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ο πρώτος όρος παριστάνει την απόσταση της 1^{ης} κυψέλης από την αποθήκη και η διαφορά την απόσταση των κυψελών μεταξύ τους.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 3 = 1 + 3\nu - 3 = 3\nu - 2$

β) Η ζητούμενη απόσταση είναι ο όρος α_{20} με $\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58\,\text{m}$

γ) i) $S_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}(2\alpha_1 + 2\omega) = \frac{3}{2}(2\cdot 1 + 2\cdot 3) = \frac{24}{2} = 12\,\text{m}$

ii) $S_{20} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{20} = \frac{20}{2}(2\alpha_1 + 19\omega) = 10(2\cdot 1 + 19\cdot 3) = 10(2+57) = 10\cdot 59 = 590\text{m}$

1417.Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Αφού τα καθίσματα από σειρά σε σειρά αυξάνονται κατά δύο, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.
Οι σειρές του σταδίου είναι 25 (περιττός) άρα υπάρχει μεσαία σειρά και είναι η $\alpha_{\frac{25+1}{2}} = \alpha_{13}$.

Θα βρούμε πόσα καθίσματα έχει η α_{13} και η τελευταία δηλαδή η α_{25}.
$\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12 + 12\cdot 2 = 12 + 24 = 36$. Άρα η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα .
$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12 + 24\cdot 2 = 12 + 48 = 60$
Επομένως η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα .

β) Για να βρω τη χωρητικότητα του σταδίου θα προσθέσω τα καθίσματα και των 25 σειρών , δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} = S_{25}$.
$S_{25} = \frac{25}{2}(2\alpha_1 + 24\omega) = \frac{25}{\cancel{2}}(\cancel{2}\cdot 12 + 24\cdot \cancel{2}) = 25\cdot 36 = 900$ θέσεις έχει το στάδιο .

γ) Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά δίνεται από το άθροισμα: $\alpha_7 + \alpha_8 + \ldots + \alpha_{14} = S_{14} - S_6$
$S_{14} = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) = 7(2\cdot 12 + 13\cdot 2) = 7(24 + 26) = 350$ θέσεις έχουν οι 14 πρώτες σειρές .
$S_6 = \frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega) = 3(2\cdot 12 + 5\cdot 2) = 3(24 + 10) = 102$ θέσεις έχουν οι 6 πρώτες σειρές .
Άρα Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά είναι
$S_{14} - S_6 = 350 - 102 = 248$. Άρα το Λύκειο έχει 248 μαθητές .

1430.Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 4)**
β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. **(Μονάδες 7)**
γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**
δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Ναι γιατί κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό (4).Έχει πρώτο όρο τον αριθμό $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$

β) $S_{40} = \frac{40}{2}\cdot(2\alpha_1 + 39\omega) = 20\cdot(2\cdot 3 + 39\cdot 4) = 20\cdot(6 + 156) = 20\cdot 162 = 3240$

γ) $\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 120 \Leftrightarrow$

$3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 120 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \notin \{1,2,3,\ldots,40\}$

Άρα ο αριθμός 120 δεν ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ) $\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 235 \Leftrightarrow$

$3+4\nu-4=235 \Leftrightarrow 4\nu-1=235 \Leftrightarrow 4\nu=236 \Leftrightarrow \nu=\frac{236}{4} \Leftrightarrow \nu=59$

Ο Γιώργος έγραψε τους αριθμούς $\alpha_{41},\alpha_{42,}\alpha_{43,},\ldots,\alpha_{59}$

Θέλουμε το άθροισμα $S=\alpha_{41}+\alpha_{42}+\alpha_{43}+\ldots+\alpha_{64}=S_{59}-S_{40}$

$S_{59}=\frac{59}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1+\overset{29}{\cancel{58}}\,\omega\right)=59\cdot(3+29\cdot 4)=59\cdot(3+116)=7021$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι : $S=7021-3240=3781$

1435.Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ,
το 2ο μήνα 110ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. **(Μονάδες 4)**

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. **(Μονάδες 4)**

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. **(Μονάδες 5)**

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. **(Μονάδες 5)**

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; **(Μονάδες 3)**

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; **(Μονάδες 4)**

Λύση

α) Το πρόγραμμα Α περιγράφει μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1=1,\ \lambda=2$

Το πρόγραμμα Β περιγράφει μία αριθμητική πρόοδο με $\beta_1=100$, $\omega=10$

i) $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=1\cdot 2^{\nu-1}=2^{\nu-1}$

ii) $\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\cdot\omega=100+(\nu-1)\cdot 10=100+10\nu-10=10\nu+90$

iii) $A_\nu=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^\nu-1}{2-1}=2^\nu-1$

iv) $B_\nu=\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu=\frac{\nu}{2}(\beta_1+\beta_\nu)=\frac{\nu}{2}(100+10\nu+90)=\frac{\nu}{\cancel{2}}\left(\overset{5}{\cancel{10}}\,\nu+\overset{95}{\cancel{190}}\right)=5\nu^2+95\nu$

β) i) $A_6=2^6-1=64-1=63$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_6=5\cdot 6^2+95\cdot 6=180+570=750$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

ii) $A_{12}=2^{12}-1=4096-1=4095$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_{12}=5\cdot 12^2+95\cdot 12=720+1140=1860$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

Με το πρόγραμμα Α θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό.

1453.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $α_{20} - α_{10} = 10ω$. **(Μονάδες 6)**

β) Αν $α_{20} - α_{10} = 30$ και $α_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $α_ν = 3ν - 2$. **(Μονάδες 6)**

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; **(Μονάδες 7)**

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) $α_{20} - α_{10} = α_1 + 19ω - (α_1 + 9ω) = \cancel{α_1} + 19ω - \cancel{α_1} - 9ω = 10ω$

β) $α_{20} - α_{10} = 30 \Leftrightarrow 10ω = 30 \Leftrightarrow ω = 3$

$α_ν = α_1 + (ν-1)\cdot ω = 1 + (ν-1)\cdot 3 = 1 + 3ν - 3 = 3ν - 2$

γ) $α_ν > 30 \Leftrightarrow 3ν - 2 > 30 \Leftrightarrow 3ν > 32 \Leftrightarrow ν > \frac{32}{3} \simeq 10,6$.Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11.

δ) $α_ν < 60 \Leftrightarrow 3ν - 2 < 60 \Leftrightarrow 3ν < 62 \Leftrightarrow ν < \frac{62}{3} \simeq 20,6$. Άρα 20 όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60.

1471.Σε αριθμητική πρόοδο είναι $α_2 = κ^2$ και $α_3 = (κ+1)^2$, κ ακέραιος με $κ > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. **(Μονάδες 8)**

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $α_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $ω = 7$. **(Μονάδες 8)**

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $ω = (κ+1)^2 - κ^2 = (\cancel{κ} + 1 - \cancel{κ})\cdot(κ+1+κ) = 2κ+1$ περιττός

β) i) $α_1, α_2, α_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Άρα

$2α_2 = α_1 + α_3 \Leftrightarrow 2κ^2 = 2 + (κ+1)^2 \Leftrightarrow 2κ^2 = 2 + κ^2 + 2κ + 1 \Leftrightarrow$

$κ^2 - 2κ - 3 = 0 \Leftrightarrow κ = -1$ απορρίπτεται$(κ > 1)$ ή $κ = 3$

Άρα $ω = 2\cdot 3 + 1 = 7$

ii) $α_ν = 1017 \Leftrightarrow α_1 + (ν-1)\cdot ω = 1017 \Leftrightarrow 2 + (ν-1)\cdot 7 = 1017 \Leftrightarrow$

$2 + 7ν - 7 = 1017 \Leftrightarrow 7ν = 1022 \Leftrightarrow ν = \frac{1022}{7} = 146$

Άρα ο όρος 1007 είναι ο 146ος όρος της προόδου.

1488. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x - 1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. **(Μονάδες 6)**

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το πλήθος των μαθητών είναι από το πρώτο δεδομένο $x(x-1)$ μαθητές.
Από το δεύτερο δεδομένο είναι $(x-3)(x+3)-1$ μαθητές. Άρα :

$$x(x-1)=(x-3)(x+3)-1 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-x=\cancel{x^2}-9-1 \Leftrightarrow -x=-10 \Leftrightarrow x=10$$

β) Έχει $10\cdot(10-1)=10\cdot 9=90$ μαθητές

γ) Κάθε ομάδα έχει 2 παραπάνω μαθητές από την προηγούμενη ομάδα. Άρα το πλήθος μαθητών κάθε ομάδας είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=2$ και $\alpha_1=2$
Το άθροισμα των μαθητών όλων των ομάδων είναι ίσο με 90 .

$$S_\nu=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{\cancel{2}}\left[2\cdot\cancel{2}+(\nu-1)\cdot\cancel{2}\right]=90 \Leftrightarrow$$

$$2\nu+\nu^2-\nu=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0 \Leftrightarrow \nu=9 \text{ ή } \nu=-10 \text{ απορρίπτεται } (\nu\geq 1)$$

$$(\,\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-90)=1+360=361=19^2$$

$\nu=\frac{-1+19}{2}=\frac{18}{2}=9$ ή $\nu=\frac{-1-19}{2}=\frac{-20}{2}=-10$). Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

1502.Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε :

$$2(x^2+x)=x^2+5+2x+4 \Leftrightarrow 2x^2\cancel{+2x}-x^2-5\cancel{-2x}-4=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

β) Για $x=3$: Οι αριθμοί που δίνονται είναι οι : $\alpha_4=3^2+5=14$, $\alpha_5=3^2+3=12$, $\alpha_6=2\cdot 3+4=10$

i) Η διαφορά $\omega=\alpha_5-\alpha_4=12-14=-2$

ii) $\alpha_4=14 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=14 \Leftrightarrow \alpha_1+3\cdot(-2)=14 \Leftrightarrow \alpha_1-6=14 \Leftrightarrow \alpha_1=20$

iii) $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}=S_{24}-S_{14}=-72-98=-170$

$$S_{24}=\frac{24}{2}(2\alpha_1+23\omega)=12\left[2\cdot 20+23\cdot(-2)\right]=12\cdot(40-46)=-72$$

$$S_{14}=\frac{14}{2}(2\alpha_1+13\omega)=7\left[2\cdot 20+13\cdot(-2)\right]=7\cdot(40-26)=98$$

1503.Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. **(Μονάδες 9)**

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. **(Μονάδες 6)**

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23$ (2).

$(2) - (1) \Rightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$

$(1) \overset{\omega=3}{\Rightarrow} \alpha_1 + 6 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

β) $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30 \cdot \omega = 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92$

γ) $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31) \Leftrightarrow$

$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{31} + 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = S_{31} + S'_{31} = 1457 + 496 = 1953$

$S_{31} = \frac{31}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1 + \overset{15}{\cancel{30}} \cdot \omega\right) = 31 \cdot (2 + 15 \cdot 3) = 31 \cdot 47 = 1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 1$ και $\omega' = 1$ $(1,2,3,\ldots\nu)$

Τότε : $1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = S'_{31} = \frac{31}{\cancel{2}}(\cancel{2}\beta_1 + \overset{15}{\cancel{30}}\,\omega') = 31 \cdot (1 + 15) = 31 \cdot 16 = 496$

1507.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. **(Μονάδες 8)**

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. **(Μονάδες 8)**

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23$ (2).

$(2) - (1) \Rightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$, $(1) \overset{\omega=3}{\Rightarrow} \alpha_1 + 6 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

β) $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30 \cdot \omega = 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92$

γ) $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31) \Leftrightarrow$

$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{31} + 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = S_{31} + S'_{31} = 1457 + 496 = 1953$

$S_{31} = \frac{31}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1 + \overset{15}{\cancel{30}} \cdot \omega\right) = 31 \cdot (2 + 15 \cdot 3) = 31 \cdot 47 = 1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 1$ και $\omega' = 1$ $(1,2,3,\ldots\nu)$

Τότε : $1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = S'_{31} = \frac{31}{\cancel{2}}(\cancel{2}\beta_1 + \overset{15}{\cancel{30}}\,\omega') = 31 \cdot (1 + 15) = 31 \cdot 16 = 496$

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. (Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, οπότε $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega$, δηλαδή $255 = 300 + 3\omega \Leftrightarrow \omega = -15$.
Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους ν , τότε $\alpha_\nu = 45$(το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του ν . Άρα

$$\alpha_\nu = 45 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 45 \Leftrightarrow 300 + (\nu-1)(-15) = 45 \Leftrightarrow 300 - 15\nu + 15 = 45 \Leftrightarrow 15\nu = 270 \Leftrightarrow \nu = 18$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{18} = S_{18}$. Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ οπότε

$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) = 9(300+45) = 3105$. Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1, β_ν είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο ν, τότε β_ν είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.
Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 147 + (\nu-1)\cdot 3 \le 300 + (\nu-1)(-15) \Leftrightarrow$

$$144 + 3\nu - 3 \le 315 - 15\nu \Leftrightarrow 18\nu \le 174 \Leftrightarrow \nu \le \frac{174}{18} = 9,7$$

Άρα η μέγιστη τιμή του ν είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

13171.Το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \ge 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1,\ \nu \ge 2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1,\ \nu \ge 1$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $S_\nu = \alpha_1$, όμως $S_1 = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 = 5$, άρα $\alpha_1 = 5$.

β) Είναι $S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$ για κάθε $\nu \geq 1$, οπότε θέτοντας όπου ν το ν-1, έχουμε
$S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) = 2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ με
$\nu - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \nu \geq 2$.

γ) Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = S_\nu$ και $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\nu-1} = S_{\nu-1}$
Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι
$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 - \nu - 1) = \cancel{2\nu^2} + 3\nu - \cancel{2\nu^2} + \nu + 1 = 4\nu + 1$ για κάθε $\nu \geq 2$.
Επειδή $\alpha_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$, τελικά είναι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$ για κάθε $\nu \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή. Είναι
$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 4(\nu+1) + 1 - (4\nu + 1) = 4\nu + 4 + 1 - 4\nu - 1 = 4$, άρα ω = 4.

13089.Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε ν =1, 2,..., 7 . (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2. Είναι $\alpha_1 = 1$ και ω = 2 οπότε ο γενικός της όρος είναι
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1) \cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$

ii. Η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2. Είναι $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι
$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega = 13 + (\nu-1) \cdot (-2) = 13 - 2\nu + 2 = 15 - 2\nu$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε ν ημέρες. Τότε την πρώτη φορά διάβασε
$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}(1 + 2\nu - 1) = \nu^2$ σελίδες
Την δεύτερη φορά διάβασε $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu = S_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) = \frac{\nu}{2}(13 + 15 - 2\nu) = 14\nu - \nu^2$ σελίδες
Όμως και τις δύο φορές διάβασε όλο το βιβλίο, άρα
$\nu^2 = 14\nu - \nu^2 \Leftrightarrow 2\nu^2 - 14\nu = 0 \Leftrightarrow 2\nu(\nu - 7) = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$ απορρίπτεται ή ν = 7ημέρες.

γ) Το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι $S_7 = 7^2 = 49$.

δ) $\beta_{8-\nu} = 15 - 2(8-\nu) = 15 - 16 + 2\nu = 2\nu - 1 = \alpha_\nu$

13173.Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 10 + 3(\nu+1) - (10 + 3\nu) = 10 + 3\nu + 3 - 10 - 3\nu = 3$, δηλαδή η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με 3, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με ω = 3.

ii. Είναι ω = 3 και $\alpha_1 = 10 + 3 = 13$

β) $14 < \alpha_\nu < 401 \Leftrightarrow 14 < 10 + 3\nu < 401 \Leftrightarrow 4 < 3\nu < 391 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \nu < \frac{391}{3}$

Επειδή $\frac{4}{3} = 1,333...$ και $\frac{391}{3} = 130,333...$ οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2, ..., \alpha_{130}$. Επειδή από το 1 έως το 130 είναι 130 αριθμοί, από το 2 έως το 130 είναι 129 όροι.

γ) $\alpha_2 + ... + \alpha_{130} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{130} - \alpha_1 = S_{130} - \alpha_1 = \frac{130}{2}\left[2 \cdot 13 + (130-1) \cdot 3\right] + 13 =$

$65(26 + 387) + 13 = 26.858$

12764.Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=2.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, οπότε

$\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\omega \Leftrightarrow 50 = \alpha_1 + 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 50 - 18 = 32$.

Συνεπώς ισχύει ότι $\alpha_1 = 32$ και ω=2.

β) Είναι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$, οπότε $S_{40} = \frac{40}{2}\left[2 \cdot 32 + (40-1) \cdot 2\right] = 20 \cdot 142 = 2.840$

Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να καθίσουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με
$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_3, \ldots$
Είναι $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = 4$, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\omega' = 4$.
Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι οι 20 πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές. Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι: $S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 32 + (20-1) \cdot 4\right] = 10 \cdot 140 = 1.400$

12945.Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56 .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της ε(α_ν) ίναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \ (1)$ και $\alpha_{11} = 32 \Leftrightarrow \alpha_1 + 10\omega = 32$ (2).
Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) προκύπτει: $8\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 3$ και με αντικατάσταση στην $(1) \Rightarrow \alpha_1 + 2 \cdot 3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$.

β) Η πρόοδος (β_ν) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = \beta_1 + \omega' = 57 + 2 = 59$.
Είναι $\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu-1) = 59 \Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$
Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της α_ν είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της β_ν, οπότε έχουμε: $\frac{2\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (2\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega'\right] \Leftrightarrow \cancel{\nu}\left(2 \cdot 2 + 3(2\nu-1)\right) = \frac{\cancel{\nu}}{2}\left(2 \cdot 57 + 2(\nu-1)\right) \Leftrightarrow$

$4 + 6\nu - 3 = \frac{114 + 2\nu - 2}{2} \Leftrightarrow 2 + 12\nu = 112 + 2\nu \Leftrightarrow 10\nu = 110 \Leftrightarrow \nu = 11$

Γεωμετρική πρόοδος

2ο θέμα

1242.α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **(Μονάδες13)**

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$ ii) $x=-1$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 \cancel{+4x}+1=5x^2 \cancel{+4x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$

β) i) Όταν $x=1$έχουμε τους αριθμούς : 1,3,9 και ολόγος είναι : $\lambda=3:1=3$

ii) Όταν $x=-1$έχουμε τους αριθμούς : -1,-1,-1 και ολόγος είναι : $\lambda=(-1):(-1)=1$

1257.α) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. **(Μονάδες 9)**

β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει : $2x=2+4-x \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$
Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και η διαφορά είναι $\omega=2-2=0$.

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$x^2=2\cdot(4-x) \Leftrightarrow x^2=8-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και ο λόγος είναι $\lambda=\frac{2}{2}=1$ ή

τους αριθμούς : 8,-4,2 και ο λόγος είναι $\lambda=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$

γ) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ισχύει: $x=2$.

1265.Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1) , με παράμετρο β >0.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\frac{\beta}{2}$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\Delta=(-5\beta)^2-4\cdot2\cdot2\beta^2=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2$, $x_1=\frac{5\beta+3\beta}{2\cdot2}=\frac{8\beta}{4}=2\beta$ και $x_1=\frac{5\beta-3\beta}{2\cdot2}=\frac{2\beta}{4}=\frac{\beta}{2}$

β) Για να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει : $\beta^2=x_1\cdot x_2$,το οποίο ισχύει γιατί $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\cancel{2}\beta^2}{\cancel{2}} = \beta^2$ (Σχέσεις Vieta)

1311.Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι , με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου. (Μονάδες12)

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)(7\kappa + 4) \Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 + 96 = 196 = 14^2$

$\kappa = \frac{10+14}{2\cdot 3} = \frac{24}{6} = 4$ ή $\kappa = \frac{10-14}{2\cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ απορρίπτεται

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,8,32 και ο λόγος είναι $\lambda = 8 : 2 = 4$

β) i) $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda = 4\alpha_1$, $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = \alpha_1 \cdot 4^4 = 256\alpha_1$, $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 = \alpha_1 \cdot 4^3 = 64\alpha_1$

ii) $\alpha_2 + \alpha_5 = 4\alpha_1 + 256\alpha_1 = 4(\alpha_1 + 256\alpha_1) = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

1321.α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow 4 \cancel{-4x} + x^2 = 6x - x^2 + 24 \cancel{-4x} \Leftrightarrow$

$2x^2 - 6x - 20 = 0 \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -2$

β) Για $x = 5$ έχουμε τους αριθμούς : $9, -3, 1 = \alpha_4$ και

i) ο λόγος είναι $\lambda = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

ii) $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \Leftrightarrow \alpha_1 = -27$

1339.Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{\alpha_1}\cdot\lambda^{\cancel{4}^{3}}}{\cancel{\alpha_1}\cdot\cancel{\lambda}}=27 \Leftrightarrow \lambda^3=27 \Leftrightarrow \lambda=3$

β) $S_4=200 \Leftrightarrow \alpha_1\dfrac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=200 \Leftrightarrow \alpha_1\dfrac{3^4-1}{3-1}=200 \Leftrightarrow$

$\alpha_1\cdot\dfrac{81-1}{2}=200 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\dfrac{\cancel{80}^{40}}{\cancel{2}}=200 \Leftrightarrow 40\alpha_1=200 \Leftrightarrow \alpha_1=5$

1360.Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες13)

β)Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) $\alpha_3=1 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^2=1$ (1), $\quad \alpha_5=4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4=4$ (2)

$\dfrac{(2)}{(1)} \Rightarrow \dfrac{\cancel{\alpha_1}\cdot\lambda^{\cancel{4}^{2}}}{\cancel{\alpha_1}\cdot\cancel{\lambda^2}}=\dfrac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2=4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=2$, $(1) \Rightarrow \alpha_1\cdot 2^2=1 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 4=1 \Leftrightarrow \alpha_1=\dfrac{1}{4}$

β) $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\dfrac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1}=\dfrac{1}{\cancel{2^2}}\cdot 2^{\cancel{\nu-1}^{\nu-3}}=2^{\nu-3}$

12787.α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-6=0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa-2,\kappa,2\kappa+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25$ και ρίζες

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{25}}{2}=3,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{25}}{2}=-2$

β) Οι αριθμοί $\kappa-2,\kappa,2\kappa+3$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$\kappa^2=(\kappa-2)(2\kappa+3) \Leftrightarrow \kappa^2=2\kappa^2+3\kappa-4\kappa-6 \Leftrightarrow 0=2\kappa^2-\kappa^2-\kappa-6 \Leftrightarrow \kappa^2-\kappa-6=0$

και από το α ερώτημα προκύπτει ότι κ = 3 ή κ = - 2. Όμως κ > 0, άρα κ = 3.

12763.Δίνεται μια πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2,2\sqrt{2},4,4\sqrt{2},\ldots$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Επομένως οι αριθμοί $2,2\sqrt{2},4$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $2\sqrt{2}=\dfrac{2+4}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}=3$ που είναι άτοπο. Άρα η α_ν δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Είναι $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2\sqrt{2},\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = 4\sqrt{2},\dots$.

Είναι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\nu-1}$

13319.Δίνονται οι αριθμοί $1-x,\ \frac{x}{2},\ 2x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Οι αριθμοί $1-x,\ \frac{x}{2},\ 2x-1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\frac{x}{2} = \frac{1-x+2x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $\frac{x}{2} = 1-x+5 \Leftrightarrow x = 2-2x+10 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

4ο θέμα

1392.Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ηςημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή η επιφάνεια που καλύπτει στη θάλασσα το πετρέλαιο κάθε μέρα είναι διπλάσια από την προηγούμενη ημέρα, οι αριθμοί 3, 6, 12,… που είναι τα τετραγωνικά που καλύπτει το πετρέλαιο είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$.
Στο τέλος της 5ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο είναι $\alpha_5 = \alpha_1\cdot\lambda^4 = 3\cdot 2^4 = 48$ τ.μ.

β) $\alpha_\nu = 768 \Leftrightarrow 3\cdot 2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = \frac{768}{3} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8$, άρα $\nu-1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$.
Δηλαδή στο τέλος της 9ης ημέρας το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.

γ) Οι αριθμοί των τετραγωνικών μέτρων που δηλώνουν την επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο στη θάλασσα από το τέλος της 9ης ημέρας και μετά είναι:

$768, 762, 756, \ldots$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 768$ και $\omega = -6$
Έστω ότι τη ν–οστή ημέρα το πετρέλαιο καλύπτει 12 τ.μ στη θάλασσα. Τότε
$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 12 \Leftrightarrow 768 - 6(\nu - 1) = 12 \Leftrightarrow 768 - 6\nu + 6 = 12 \Leftrightarrow$

$768 + 6 - 12 = 6\nu \Leftrightarrow 6\nu = 762 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{762}{6} = 127$.

Δηλαδή σε 127 ημέρες η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

1394.Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.
α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες6)
β)Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).
i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες6)
ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες6)
iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες7)

Λύση

Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 102400$ βακτήρια και $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

α) Μετά από 6 ώρες θα έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 102400 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \dfrac{1}{32} = 3200$ βακτήρια

β) i) Μετά από μία ώρα θα έχουμε $3200 \cdot 3 = 9600$ βακτήρια. Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να τριπλασιάζεται έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\beta_1 = 9600$ και λ=3

ii) $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$

iii) $\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.

1498.Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
α) Να αποδείξετε ότι Ε=1 . (Μονάδες 10)
β) Αν α + β = 10 τότε:
i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β. (Μονάδες 5)
ii) Να βρείτε τα μήκη α, β. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν Ε = αβ (1).
Οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $E^2 = \alpha\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \overset{E>0}{\Leftrightarrow} E = 1$.

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε: $S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10$ και $P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$
Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \;(2)$

ii) Τα α, β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα: $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot1=96$

και ρίζες $x_1=\dfrac{10+\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10+\sqrt{16\cdot6}}{2}=\dfrac{10+4\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\cancel{2}}=5+2\sqrt{6}$,

$x_2=\dfrac{10-\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10-4\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\cancel{2}}=5-2\sqrt{6}$

Άρα $\alpha=5+2\sqrt{6}$ και $\beta=5-2\sqrt{6}$ ή $\alpha=5-2\sqrt{6}$ και $\beta=5+2\sqrt{6}$.

1499.Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2\left(S_\nu+24\right)=\beta_7$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$2x=2+8\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=5$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,5,8 και η διαφορά είναι $\omega=5-2=3$

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει : $x^2=2\cdot8\Leftrightarrow x^2=16\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,4,8 και ο λόγος είναι $\lambda=\dfrac{4}{2}=2$

γ) i) $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]=\dfrac{\nu}{2}\left[2\cdot2+(\nu-1)3\right]=\dfrac{\nu}{2}\left(4+3\nu-3\right)=\dfrac{\nu}{2}(3\nu+1)=\dfrac{3\nu^2+\nu}{2}$

ii) $\beta_7=\beta_1\cdot\lambda^6=2\cdot2^6=2^7=128$

$2\left(S_\nu+24\right)=\beta_7\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{3\nu^2+\nu}{2}+24\right)=128\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=128\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0$

$\Delta=1^2-4\cdot3\cdot(-80)=1+960=961=31^2$

$\nu=\dfrac{-1+31}{2\cdot3}=\dfrac{30}{6}=5$ ή $\nu=\dfrac{-1-31}{2\cdot3}=\dfrac{-32}{6}=-\dfrac{16}{3}$ απορρίπτεται (ν>0)

1519.Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}S_{10}$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4$ (1), $\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 16$ (2)

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha_1}\lambda^{\cancel{4}^{2}}}{\cancel{\alpha_1}\cancel{\lambda^2}} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2(\lambda > 0),\ (1)\overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_1 \cdot 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \dfrac{1}{2}$ Άρα η ακολουθία (β_ν)αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) $\beta_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} = 1$, $S_{10} = a_1 \dfrac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$

$$S'_{10} = 1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\cancel{2}(1 - 2^{10})}{2^{\cancel{10}^{9}}} = -\frac{-1023}{2^9} = \frac{1023}{2^9} = \frac{1}{2^9} \cdot 1023 = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}$$

12731.Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ $(\kappa \neq 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$.

Θεωρούμε τους αριθμούς $\dfrac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)
γ) Αν οι αριθμοί $\dfrac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, $(\kappa > 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\dfrac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι αριθμοί $\dfrac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$\kappa^2 = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{\kappa^2 \cdot \cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \Leftrightarrow \kappa^2 = \kappa^2$$ που ισχύει

β) Το άθροισμα των τριών αριθμών είναι: $\dfrac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \dfrac{\kappa}{\lambda} + \dfrac{\kappa\lambda}{\lambda} + \dfrac{\kappa\lambda^2}{\lambda} = \dfrac{\kappa + \kappa\lambda + \kappa\lambda^2}{\lambda} = \dfrac{\kappa(1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda}$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε τιμή του αριθμού λ. Επειδή $\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$,είναι $\dfrac{\kappa(1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} \neq 0$

γ) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36$ και ρίζες

$x_1 = \dfrac{-10 + \sqrt{36}}{2} = -2,\ x_2 == \dfrac{-10 - \sqrt{36}}{2} = -8$. Άρα $\left(\dfrac{\kappa}{\lambda} = -2 \text{ και } \kappa\lambda = -8\right)$ ή $\left(\dfrac{\kappa}{\lambda} = -8 \text{ και } \kappa\lambda = -2\right)$

Αν $\dfrac{\kappa}{\lambda} = -2$ και $\kappa\lambda = -8$ τότε $\dfrac{\kappa}{\lambda} = -2 \Leftrightarrow \kappa = -2\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa\lambda = -8$ προκύπτει:

$-2\lambda \cdot \lambda = -8 \Leftrightarrow -2\lambda^2 = -8 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

Αν $\lambda = 2$ τότε $\kappa = -2 \cdot 2 = -4$ και αν $\lambda = -2$ τότε $\kappa = -2 \cdot (-2) = 4$. Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι οι -2, - 4, -8 ή -2, 4, -8.

Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = -8$ και $\kappa\lambda = -2$ τότε $\frac{\kappa}{\lambda} = -8 \Leftrightarrow \kappa = -8\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa\lambda = -2$ προκύπτει:

$$-8\lambda \cdot \lambda = -2 \Leftrightarrow -8\lambda^2 = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ τότε $\kappa = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4$ κι αν $\lambda = -\frac{1}{2}$ τότε $\kappa = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι οι -8, -4, -2 ή -8, 4, -2.

12998.Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$ (Μονάδες 5)

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Οι αριθμοί $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$\frac{81}{2} = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow 81 = \frac{81\sqrt{3}}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 162 = 108\sqrt{3}$ που είναι αδύνατο, άρα δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{3^3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^6\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$

β) Η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει λόγο $\lambda = \frac{\frac{81}{\cancel{2}}}{\frac{27\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{81}^{3}}{\cancel{27}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.Είναι

$\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^6 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^{\cancel{7}}}{\cancel{\left(\sqrt{3}\right)^6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^\nu$

γ) $S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

2ο θέμα

1244.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$ **(Μονάδες 13)**

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$,ώστε $f(x)=0$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $f(-1)=2(-1)+4=-2+4=2$ και $f(3)=3-1=2$, άρα $f(-1)=f(3)$.

β) Για $x<0$: $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2<0$ δεκτή

Για $x\geq 0$: $f(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1>0$ δεκτή

1255.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 15)**

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $x^2-x-6\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$ και $x\neq -2$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\{-2,3\}$

β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}=\dfrac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$, $f(2)+f(4)=\dfrac{1}{2-3}+\dfrac{1}{4-3}=-1+1=0$

1263.Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: y=35+0,8x

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά; **(Μονάδες 12)**

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A; **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $y=35+0,8\cdot 25=35+20=55\,\text{km}$

β) $75=35+0,8x\Leftrightarrow 0,8x=40\Leftrightarrow x=50\,\text{min}$

1278.Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: T=15+25·x, όταν 0≤x≤200.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση x = 30 και βρίσκουμε ισοδύναμα: T = 15 + 25 · 30=15 + 750=765 0C

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290 0C θέτουμε στη δοθείσα σχέση T = 290 και βρίσκουμε ισοδύναμα:
$290 = 15 + 25 \cdot x \Leftrightarrow 275 = 25x \Leftrightarrow x = 11$ χιλιόμετρα

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 ºC λύνουμε την ανίσωση:
$T > 440 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow 25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow x > 17$ χιλιόμετρα
Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440 0C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

1283.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x\ , \text{αν } x<0 \\ 2x+5, \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι : $f(-5)=f(4)$. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τις τιμές του x ∈ℝ, ώστε $f(x)=9$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $f(-5)=8-(-5)=8+5=13$, $f(4)=2\cdot 4+5=8+5=13$, άρα $f(-5)=f(4)$.

β) Για $x<0$: $f(x)=9 \Leftrightarrow 8-x=9 \Leftrightarrow x=-1 > 0$ δεκτή
Για $x\ge 0$: $f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+5=9 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 < 0$ δεκτή

1295.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$. **(Μονάδες 15)**

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $x-4\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 4$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{4\}$

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=x(x+4)=x^2+4x$$

β) $f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0 \Leftrightarrow x=-8$(δεκτή) ή $x=4$(απορρίπτεται)

1297.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\ne 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$ **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$ **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{1}-\left(2+\frac{1}{2}\right)=\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{2}+1+1-\cancel{2}-\cancel{\frac{1}{2}}=2$

β) $f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\overset{(\cdot 2x)}{\Leftrightarrow}2x^2+2=5x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$, $x_1=\frac{5+3}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{5-3}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

1354.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. (Μονάδες 5)
β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ (Μονάδες 10)
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει $x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) $2x^2-5x+3$
Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1$
Οι ρίζες του είναι $x_1=\frac{5+1}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ και $x_2=\frac{5-1}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1$
Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$

γ) $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(2x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2x-3}{x+1}$

1372.Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)
β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 8)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $A_f=(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$

β) $f(-1)=2(-1)-5=-7$, $f(3)=2\cdot 3-5=1$, $f(5)=5^2=25$

γ) Για $x\leq 3$: $f(x)=25\Leftrightarrow 2x-5=25\Leftrightarrow 2x=30\Leftrightarrow x=15$ απορρίπτεται

Για $3<x<10$: $f(x)=25\Leftrightarrow x^2=25\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=5$ δεκτή (3<5<15)

1385.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 . **(Μονάδες 12)**

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης. **(Μονάδες 5)**

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. **(Μονάδες 8)**

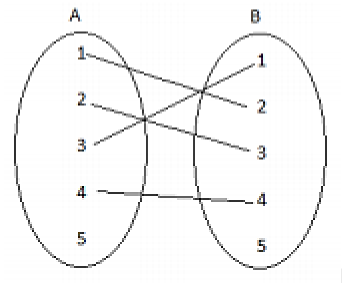
Λύση

α) $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1,\ x_1=\dfrac{5+1}{2}=3,\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2$.Άρα $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

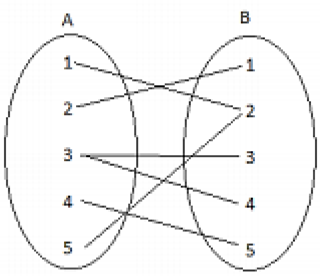
β) i) Πρέπει $x^2-5x+6\neq0\Leftrightarrow x\neq2$ και $x\neq3$, άρα $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$

ii) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$

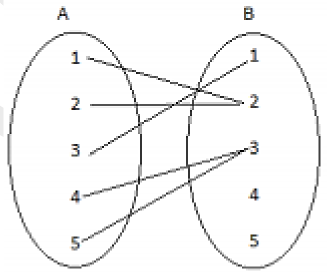
12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β. **(Μονάδες 9)**

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. **(Μονάδες 4)**

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f. **(Μονάδες 4)**

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η αντιστοιχία του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β. Η αντιστοιχία του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση γιατί το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β. Η αντιστοιχία του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

β) i. Το πεδίο ορισμού είναι το $A=\{1,2,3,4,5\}$

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(A)=\{1,2,3\}$.

iii. Είναι $f(1)=f(2)=2$.

12997.Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση f : Α→ Β σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε

μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την g: B→ A με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.
α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση f : A→ B ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B. **(Μονάδες 10)**
β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση g:B→A αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.
(Μονάδες 15)

Λύση

α) Η αντιστοίχιση f : A→B δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο B, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου A σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου B.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο B στο σύνολο A θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο B αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο A, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο.
Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

13031.Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2,\ x=0,\ x=-\dfrac{1}{2}$. **(Μονάδες 9)**
β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G . **(Μονάδες 7)**
γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $G(2)=\dfrac{2\cdot 2+3}{2-4}=\dfrac{7}{-2}=-\dfrac{7}{2}$, $G(0)=\dfrac{2\cdot 0+3}{0-4}=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$ και $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}{-\dfrac{1}{2}-4}=\dfrac{2}{-\dfrac{9}{2}}=-\dfrac{4}{9}$.

β) Η G δεν ορίζεται όταν $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

γ) Για $x\neq 4$ είναι $G(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-4}=3\Leftrightarrow 2x+3=3x-12\Leftrightarrow 2x-3x=-12-3\Leftrightarrow -x=-15\Leftrightarrow x=15$

13032.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x,\ g(x)=\sqrt{x+5}$.
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g. **(Μονάδες 8)**
β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$. **(Μονάδες 8)**
γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η συνάρτηση f δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_f=\mathbb{R}$.
Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5$ άρα $A_g=[-5,+\infty)$.

β) Είναι $f(-1)=1-3\cdot(-1)=1+3=4$ και $g(11)=\sqrt{11+5}=\sqrt{16}=4$ άρα $f(-1)=g(11)$.

γ) $f(x)=g(4)\Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{4+5}\Leftrightarrow 1-3x=3\Leftrightarrow -3x=3-1\Leftrightarrow -3x=2\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

12765.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1,\frac{\sqrt{2}}{2},6$ είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$, άρα $A_f=[2,+\infty)$.

β) Επειδή το – 1 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f, δεν υπάρχει τιμή της f στο – 1.

Επειδή το $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f, δεν υπάρχει τιμή της f στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Είναι $f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$.

13026.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν x άρρητος} \\ 2x, & \text{αν x ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2=4x-1$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Επειδή ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, είναι $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$.

Επειδή ο $\frac{1}{2}$ είναι ρητός αριθμός, είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

β) Αν x ρητός τότε:

$$[f(x)]^2=4x-1 \Leftrightarrow (2x)^2=4x-1 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

4ο θέμα

1389.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ. **(Μονάδες 9)**

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. **(Μονάδες 9)**

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ και είναι ρητή, οι αριθμοί -2 και 1 είναι ρίζες του παρονομαστή. Άρα $(-2)^2+\kappa(-2)+\lambda=0\Leftrightarrow 4-2\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow -2\kappa+\lambda=-4$ (1) και

$1^2+\kappa\cdot 1+\lambda=0\Leftrightarrow \kappa+\lambda=-1$ (2)

Αφαιρώντας από την (1) τη (2), έχουμε:

$$-2\kappa+\cancel{\lambda}-\kappa-\cancel{\lambda}=-4-(-1)\Leftrightarrow -3\kappa=-4+1\Leftrightarrow -3\kappa=-3\Leftrightarrow \kappa=\frac{-3}{-3}=1$$

Από τη (2) για $\kappa=1$ έχουμε $1+\lambda=-1\Leftrightarrow\lambda=-2$

β) i) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ είναι

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}\Leftrightarrow g(x)=(x+1)(x-2)$$

ii) Είναι $g(\alpha+3)=(\alpha+3+1)(\alpha+3-2)=(\alpha+4)(\alpha+1)$ και $g(\alpha)=(\alpha+1)(\alpha-2)$ άρα

$g(\alpha+3)>g(\alpha)\Leftrightarrow(\alpha+4)(\alpha+1)>(\alpha+1)(\alpha-2)\Leftrightarrow(\alpha+4)(\alpha+1)-(\alpha+1)(\alpha-2)>0\Leftrightarrow$

$(\alpha+1)\left[(\alpha+4)-(\alpha-2)\right]>0\Leftrightarrow(\alpha+1)(\cancel{\alpha}+4-\cancel{\alpha}+2)>0\Leftrightarrow 6(\alpha+1)>0\Leftrightarrow$

$\alpha+1>0\Leftrightarrow\alpha>-1$. Επειδή όμως $\alpha\neq-2$ και $\alpha\neq1$ τελικά είναι $\alpha\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$

1390. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ. **(Μονάδες 9)**

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. **(Μονάδες 9)**

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$ όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ και είναι ρητή, οι αριθμοί -2 και 1 είναι ρίζες του παρονομαστή. Άρα

$(-2)^2+\kappa(-2)+\lambda=0\Leftrightarrow 4-2\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow -2\kappa+\lambda=-4$ (1) και $1^2+\kappa\cdot1+\lambda=0\Leftrightarrow\kappa+\lambda=-1$ (2)

Αφαιρώντας από την (1) τη (2), έχουμε:

$$-2\kappa+\cancel{\lambda}-\kappa-\cancel{\lambda}=-4-(-1)\Leftrightarrow -3\kappa=-4+1\Leftrightarrow -3\kappa=-3\Leftrightarrow \kappa=\frac{-3}{-3}=1$$

Από τη (2) για $\kappa=1$ έχουμε $1+\lambda=-1\Leftrightarrow\lambda=-2$

β) i) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ είναι

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}\Leftrightarrow g(x)=(x+1)(x-2)$$

ii) Είναι $g(\alpha)\cdot g(\beta)=(\alpha+1)(\alpha-2)(\beta+1)(\beta-2)$

Επειδή $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$, είναι $\alpha+1>0,\ \alpha-2<0,\ \beta+1>0,\ \beta-2<0$, οπότε $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$.

1400. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12{,}5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15{,}5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Τα πάγια έξοδα της επιχείρησης είναι $K(0)=120$ ευρώ , γιατί πρόκειται για το κόστος της εταιρείας τους χωρίς καθόλου παραγωγή.

β) Επειδή τα πάγια έξοδα είναι 120 ευρώ και από την παραγωγή x μπλουζάκια, το κόστος είναι $12{,}5x$,ο αριθμός 12,5 εκφράζει το πόσο κοστίζει ένα μπλουζάκι.
Αντίστοιχα επειδή τα έσοδα από τη πώληση x τεμαχίων, η είσπραξη είναι $15{,}5x$, το 15,5 είναι η είσπραξη από τη πώληση μιας μπλούζας, άρα το 15,5 εκφράζει το πόσο που πουλιέται ένα μπλουζάκι.

γ) $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 12{,}5x+120=15{,}5x\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$ μπλουζάκια

Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια για να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση.

δ) Αν A(x) η συνάρτηση του κέρδους τότε $A(x)=E(x)-K(x)=15{,}5x-12{,}5x-120=3x-120$

$A(60)=3\cdot 60-120=180-120=60$ ευρώ. Θα έχει κέρδος 60 ευρώ.

1418.Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1) cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αν $E_A(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α, τότε : $E_A(d)=d^2$

Αν $E_B(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Β, τότε : $E_B(d)=(d+1)^2$.

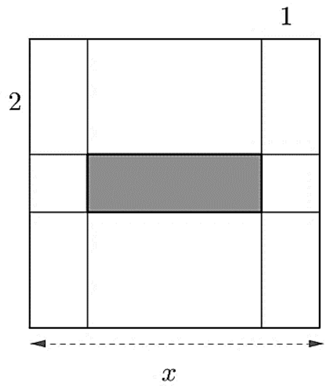
β) i) Αν Ε η επιφάνεια του τοίχου τότε $E=200\cdot E_A(d)=128\cdot E_B(d)\ cm^2$.

$$200\cdot E_A(d)=128\cdot E_B(d)\Leftrightarrow 200d^2=128(d+1)^2\overset{(:8)}{\Leftrightarrow}$$
$$25d^2=16(d+1)^2\Leftrightarrow 25d^2=16d^2+32d+16\Leftrightarrow 9d^2-32d-16=0$$
$$\Delta=(-32)^2-4\cdot 9\cdot(-16)=1024+576=1600=40^2$$
$$d=\frac{32+40}{2\cdot 9}=\frac{72}{18}=4cm \text{ ή } d=\frac{32-40}{2\cdot 9}=\frac{-8}{18}<0 \text{ Απορρίπτεται}$$

Άρα το πλακάκι τύπου Α θα έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β πλευρά (4+1)=5 cm

ii) $E=200\cdot E_A(d)=200\cdot 4^2=200\cdot 16=3200cm^2$.

1420. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5\le x\le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=(x-2)(x-4)$ (Μονάδες 8)

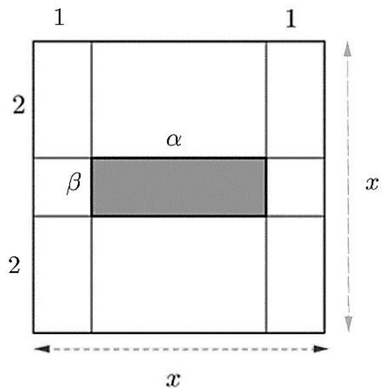
β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας .

Τότε $\alpha=x-1-1=x-2$ και $\beta=x-2-2=x-4$.
Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=\alpha\cdot\beta$, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=(x-2)(x-4)$



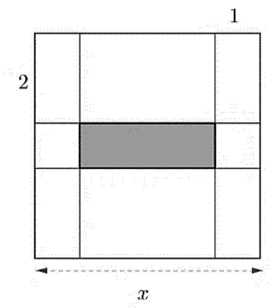
β) $E(x)=(x-2)(x-4)\Leftrightarrow 35=(x-2)(x-4)\Leftrightarrow$
$x^2-2x-4x+8=35\Leftrightarrow x^2-6x-27=0\Leftrightarrow$
$x=9cm$ ή $x=-3<0$ απορρίπτεται

γ) $E(x)\ge 24\Leftrightarrow(x-2)(x-4)\ge 24\Leftrightarrow x^2-2x-4x+8\ge 24\Leftrightarrow x^2-6x-16\ge 0$

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=100=10^2$, $x_1=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8$ και $x_2=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Άρα: $x^2-6x-16\ge 0\Leftrightarrow(x-8)(x+2)\ge 0\overset{x+2>0}{\Leftrightarrow} x-8\ge 0\Leftrightarrow x\ge 8$

1421. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \le x \le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

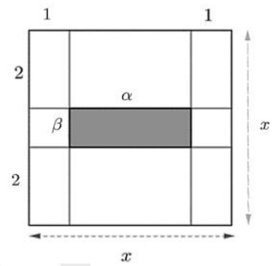


α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
$E(x) = x^2 - 6x + 8$. (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm². (Μονάδες 7)

γ) Αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν το πολύ 35 cm2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει τετραγώνου. (Μονάδες 10)

Λύση



α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας.
Τότε $\alpha = x - 1 - 1 = x - 2$ και $\beta = x - 2 - 2 = x - 4$.
Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι
$E = \alpha \cdot \beta$, το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης
των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
$E(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 2x - 4x + 8 = x^2 - 6x + 8$

β) $E(x) = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow 24 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -2 < 0$ απορρίπτεται ή $x = 8$ cm

γ) $E(x) \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 9]$ όμως $5 \le x \le 10$ άρα τελικά $x \in [5, 9]$.

1422. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (○C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (○F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.
Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (○C) σε βαθμούς Κέλβιν (○K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (○C) το 273.
α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (○K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (○F) είναι η: $K = \dfrac{F-32}{1,8} + 273$ (Μονάδες 7)
γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278○K μέχρι 283 ○K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ○F. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Π1: $F = 1,8 \cdot C + 32\ (1)$ και Π2: $K = C + 273\ (2)$

β) $F = 1,8 \cdot C + 32 \Leftrightarrow 1,8 \cdot C = F - 32 \Leftrightarrow C = \dfrac{F-32}{1,8} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} K + 273 = \dfrac{F-32}{1,8} \Leftrightarrow K = \dfrac{F-32}{1,8} - 273\ (3)$

γ) $278 < K < 283 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 278 < \dfrac{F-32}{1,8} + 273 < 283 \overset{(-273)}{\Leftrightarrow} 5 < \dfrac{F-32}{1,8} < 10 \overset{(\cdot 1,8)}{\Leftrightarrow} 9 < F - 32 < 18 \Leftrightarrow 41 < F < 50$

1437.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. **(Μονάδες 9)**

γ) Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $|x|-3\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$.άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\dfrac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}=\dfrac{|x|^2-2|x|-3|x|+6}{|x|-3}=$

$\dfrac{|x|(|x|-2)-3(|x|-2)}{|x|-3}=\dfrac{(|x|-2)\cdot\cancel{(|x|-3)}}{\cancel{|x|-3}}=|x|-2$

γ) $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4(|x|-2)-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+8-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$ (1)

Θέτουμε $|x|=\omega$ (2)

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\omega^2-4\omega+3=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=3$, $(2)\overset{\omega=1}{\Rightarrow}|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, $(2)\overset{\omega=3}{\Rightarrow}|x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$

1441.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$,με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. **(Μονάδες 7)**

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$ **(Μονάδες 8)**

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ **(Μονάδες 5+5=10)**

Λύση

α) $f(2)=g(2) \Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2+\alpha=2\alpha-5 \Leftrightarrow 4-8+\alpha=2\alpha-5 \Leftrightarrow \alpha=1$

β) i) Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=x^2-4x+1$ και $g(x)=x-5$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-4x+1=x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

ii) $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x^2-4x+1\geq x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Η λύση της ανίσωσης είναι : $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$,όταν :

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+1-x+5\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

1457.Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1-2\lambda)^2 \geq 0$.
Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Θα πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, που ισχύει όταν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

1467. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

Λύση

α) i) $f(0) = 12$ ευρώ

ii) $f(10) = 12 + 0,5 \cdot 12 = 12 + 6 = 18$ ευρώ

iii) $f(50) = 0,7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41$ ευρώ

β) Θα πρέπει : $f(x) > g(x)$

Αν $0 \leq x \leq 30$: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \cancel{12} + 0,5x > \cancel{12} + 0,6x \Leftrightarrow x < 0$ άτοπο.

Αν $x > 30$: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{0,1} \Leftrightarrow x > 60$

Άρα ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

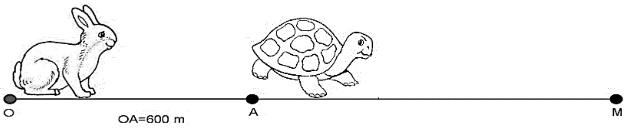
1484. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.

Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.

Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.

Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA=600$ μέτρα.
Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10\,t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.



α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)
β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ=2250 μέτρα. Να βρείτε:
i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)
ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή t = 12min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)
iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για να κερδίσει η χελώνα τον αγώνα θα πρέπει:

$$S_\Lambda(t)<S_X(t)\Leftrightarrow 10\,t^2<600+40t\Leftrightarrow 10\,t^2-40t-600<0\overset{(:10)}{\Leftrightarrow} t^2-4t-60<0$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-60)=16+240=256=16^2$$

$t_1=\dfrac{4+16}{2}=\dfrac{20}{2}=10$ και $t_2=\dfrac{4-16}{2}=\dfrac{-12}{2}=-6$ απορρίπτεται αφού $t\geq 0$.

Είναι $t^2-4t-60<0\Leftrightarrow (t+6)(t-10)<0 \overset{t\geq 0\Leftrightarrow t+6>0}{\Leftrightarrow} t-10<0\Leftrightarrow t<10$ Άρα $t\in[0,10)$

Για $t=10$: $S_x(10)=10\cdot 10^2=1000=S_\Lambda(10)$

Θα πρέπει το τέρμα να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1000m από το Ο.

β) i) Όταν $t=10$ από το α) ερώτημα

ii) Επειδή $t=12>10$ προηγείται ο λαγός και η απόσταση μεταξύ τους είναι:

$S_\Lambda(12)-S_x(12)=1440-1080=360\text{m}$

γ) Επειδή $OM=2250\text{m}>1000\text{m}$,θα τερματίσει πρώτος ο λαγός.

$S_\Lambda(t)=10\cdot t^2=2250\Leftrightarrow t^2=225\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t=15\,\text{min}.$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=15$ min θα τερματίσει ο νικητής ,δηλαδή ο λαγός.

1495.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο : $E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, $x\in(0,10)$ (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$. (Μονάδες 8)
γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με

$\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

Λύση

α) $x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$ (1)

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με $E = \frac{x\cdot y}{2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}x\cdot(10-x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$

Άρα $E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0,10)$

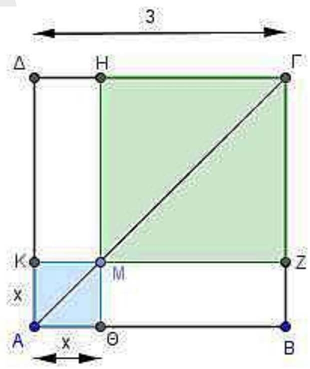
β) $E(x)\le\frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}(-x^2+10x)\le\frac{25}{\cancel{2}} \Leftrightarrow -x^2+10x-25\le 0 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$

$x^2-10x+25\ge 0 \Leftrightarrow (x-5)^2\ge 0$ ισχύει

γ) $E(x)=\frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}(-x^2+10x)=\frac{25}{\cancel{2}} \Leftrightarrow x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ δεκτή

Για $x=5:(1)\Rightarrow y=5$.Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1497. Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ=3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E\ge\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $H\Gamma=\Delta\Gamma-\Delta H=3-x$

$E=(HMZ\Gamma)+(AKM\Theta)=x^2+(3-x)^2=x^2+9-6x+x^2=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$

β) $4x^2-12x+9\ge 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2\ge 0$ ισχύει

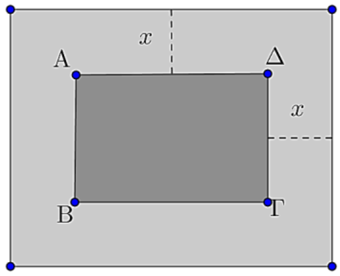
γ) $E=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2-6x+9=\frac{9}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 4x^2-12x+18=9 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow (2x-3)^2=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow$

$2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΘΜ : $AM^2=A\Theta^2+M\Theta^2 \overset{x=\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} AM^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$AM^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{4} \Leftrightarrow AM^2=\frac{18}{4} \Leftrightarrow AM^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow AM=\sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow AM=\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

1505. **Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.**

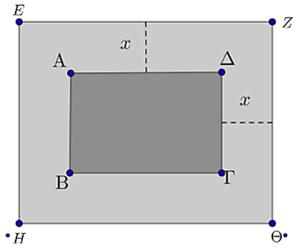


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:
$\mathbf{E(x)=4x^2+80x,\ \ x>0}$. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $\mathbf{E=500\ m^2}$. **(Μονάδες 7)**

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m²; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση



α) $EZ=A\Delta+2x=25+2x$, $EH=AB+2x=15+2x$

$(EZH\Theta)=(15+2x)(25+2x)=375+30x+50x+4x^2=$

$4x^2+80x+375\,m^2$

$(AB\Gamma\Delta)=15\cdot 25=375\ m^2$

$E(x)=(EZH\Theta)-(AB\Gamma\Delta)=4x^2+80x\cancel{+375}\ \cancel{-375}\Leftrightarrow$

$E(x)=4x^2+80x,\ x>0$

$E(x)=500\Leftrightarrow 4x^2+80x=500\Leftrightarrow 4x^2+80x-500=0\overset{(:4)}{\Leftrightarrow}$

$x^2+20x-125=0\Leftrightarrow x=5$ ή $x=-25$ απορρίπτεται

β) Άρα x=5m

γ) $E(x)<500\Leftrightarrow 4x^2+80x<500\Leftrightarrow 4x^2+80x-500<0\overset{(:4)}{\Leftrightarrow}$

$x^2+20x-125<0\Leftrightarrow (x-5)(x+25)<0\overset{x+25>0}{\Leftrightarrow} x-5<0\Leftrightarrow x<5$, άρα $x\in(0,5)$.

1506. **Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο Π=40cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :**

α) να αποδείξετε ότι $\mathbf{0<x<20}$. **(Μονάδες 4)**

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{E(x)=20x-x^2}$. **(Μονάδες 8)**

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $\mathbf{E(x)\le 100}$**, για κάθε** $\mathbf{x\in(0,20)}$. **(Μονάδες 6)**

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Έστω y το πλάτος του ορθογωνίου .

$\Pi=40\Leftrightarrow 2x+2y=40\overset{(:2)}{\Leftrightarrow} x+y=20\Leftrightarrow y=20-x$ (1)

Επειδή x, y μήκη πλευρών x, y >0

Από την σχέση (1) ισχύει : $y>0\Leftrightarrow x<20$.Άρα $0<x<20$

β) $E(x)=x\cdot y=x\cdot(20-x)=20x-x^2$

γ) $E(x)\le 100\Leftrightarrow 20x-x^2\le 100\Leftrightarrow x^2-20x+100\ge 0\Leftrightarrow (x-10)^2\ge 0$ ισχύει .

δ) Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν είναι :

$E(x)=100\Leftrightarrow 20x-x^2=100\Leftrightarrow x^2-20x+100=0\Leftrightarrow (x-10)^2=0\Leftrightarrow x-10=0\Leftrightarrow x=10\text{cm}$

Για $x = 10 \Leftrightarrow y = 20 - 10 \Leftrightarrow y = 10$ cm

Το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο πλευράς 10cm.

1510.Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το κόστος για το γέμισμα ν τόνερ είναι 15ν και μαζί με τα πάγια έξοδα, έχουμε: $K(\nu) = 15\nu + 6500$

β) Τα έσοδα από την πώληση ν τόνερ, είναι $E(\nu) = 25\nu$

γ) i) Για να μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα = έξοδα

Άρα $E(\nu) = K(\nu) \Leftrightarrow 15\nu + 6500 = 25\nu \Leftrightarrow 10\nu = 6500 \Leftrightarrow \nu = 650$ τόνερ ανά μήνα

ii) Έστω Α(ν) η συνάρτηση του κέρδους τότε πρέπει :

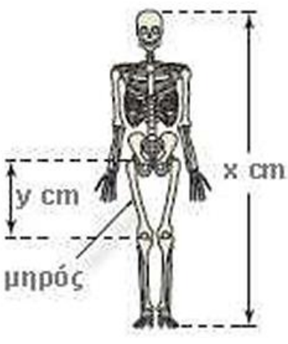
$$A(\nu) \geq 500 \Leftrightarrow E(\nu) - K(\nu) \geq 500 \Leftrightarrow 25\nu - 15\nu - 6500 \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$10\nu \geq 7000 \Leftrightarrow \nu \geq 700 \text{ τόνερ ανά μήνα}$$

1501.Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους *y* (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους *x* (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

Γυναίκα: $y = 0{,}43x - 26$

Άνδρας $y = 0{,}45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *38,5*cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου *164*cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *42,8*cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αντικαθιστούμε για y=38,5 στον τύπο που δίνει το μήκος *y* (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους *x* (σε cm) μιας γυναίκας $38{,}5 = 0{,}43x - 26 \Leftrightarrow 0{,}43x = 64{,}5 \Leftrightarrow x = 150$cm

Άρα το ύψος της γυναίκας είναι 1,5m

β) Όμοια : $42{,}8 = 0{,}45x - 31 \Leftrightarrow 0{,}45x = 73{,}8 \Leftrightarrow x = 164$cm .Επομένως είναι πιθανό να προέρχονται από τον ίδιο άντρα

γ) Θα πρέπει $0,43x-26=0,45x-31 \Leftrightarrow 0,02x=5 \Leftrightarrow x=250cm$.Όταν έχουν ύψος 2,5m

1526.Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1-3\alpha|<2$
- **Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.**

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $|1-3\alpha|<2 \Leftrightarrow -2<1-3\alpha<2 \Leftrightarrow -3<-3\alpha<1\ (2) \overset{(:(-3)<0)}{\Leftrightarrow} 1>\alpha>-\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<1\ (3)$

β) $d(\beta,2)<1 \Leftrightarrow |\beta-2|<1 \Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow 1<\beta<3\ (4)$

$(2) \Rightarrow -3-1<-3\alpha-1<0 \Leftrightarrow -4<-3\alpha-1<0\ (5)$

Με πρόσθεση των (4) και (5) έχουμε $-3<\beta-3\alpha-1<3 \Leftrightarrow |\beta-3\alpha-1|<3$

γ) Πρέπει $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$\Delta=\left[-4(\beta-2)\right]^2-4\cdot 4\cdot \beta^2=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=\cancel{16\beta^2}-64\beta+64-\cancel{16\beta^2}=-64\beta+64=64(-\beta+1)$

$(4) \Rightarrow -1>-\beta>-3 \Leftrightarrow -3<-\beta<-1 \Leftrightarrow -2<1-\beta<0$

Άρα $-\beta+1<0 \Leftrightarrow 64(-\beta+1)<0 \Leftrightarrow \Delta<0$

Άρα $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($\alpha=4>0$).

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t)=150+50t,\ t \in [0,5]$. Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t)=650-25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα. (Μονάδες 6)

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

Λύση

α) Το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο την χρονική στιγμή $t=0$ και το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας είναι $Y_1(0)=150+50\cdot 0=150$ μέτρα.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5)=150+50\cdot5=400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο t ∈[5, 10].

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10ο λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα [10, 20].
Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:
$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50\,t = 250 \Leftrightarrow t = 2$ λεπτά και $Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25\,t = 250 \Leftrightarrow t = 16$ λεπτά

δ) i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το 5 ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:
$Y_1(t+1)-Y_1(t)=\left[150+50(t+1)\right]-(150+50t)=50$ μέτρα.
ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το 10ο μέχρι το 20ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού: $Y_2(t+1)-Y_2(t)=\left[650-25(t+1)\right]-(650-25t)=-25$ μέτρα.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

2ο θέμα

1259.Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $x^2-1\neq0 \Leftrightarrow x^2\neq1 \Leftrightarrow x\neq\pm1$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$
β) Το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Άρα ισχύει $f(\alpha)=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2-1}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2-1=8 \Leftrightarrow \alpha^2=9 \Leftrightarrow \alpha=\pm3$

1299.α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$. (Μονάδες 13)
β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,\ 3)$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$

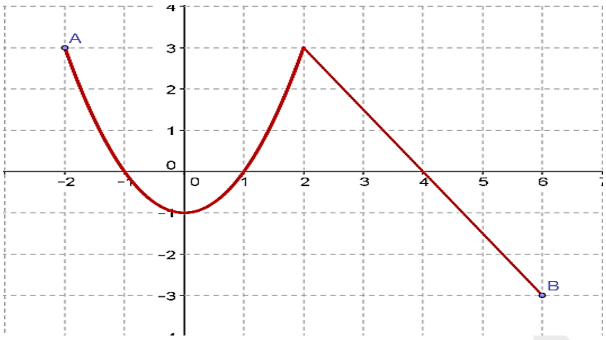
β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x}=x^2-x+3 \overset{(\cdot x)}{\Leftrightarrow} 3=x^3-x^2+3x \Leftrightarrow$$

$$x^3-x^2+3x=3=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x^2+3)(x-1)=0 \overset{(x^2+3\neq0)}{\Leftrightarrow} x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Είναι $f(1)=\dfrac{3}{1}=3=g(1)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $\mathrm{A}(1,3)$.

1304.Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 6)**
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**-2**	**-1**		**1**	**2**	
y			**-1**			**-3**

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. **(Μονάδες 6)**
δ)Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Οι προβολές όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον άξονα x΄x , δημιουργούν το σύνολο $[-2,6]$, άρα $\mathrm{A}_f = [-2,6]$

β)

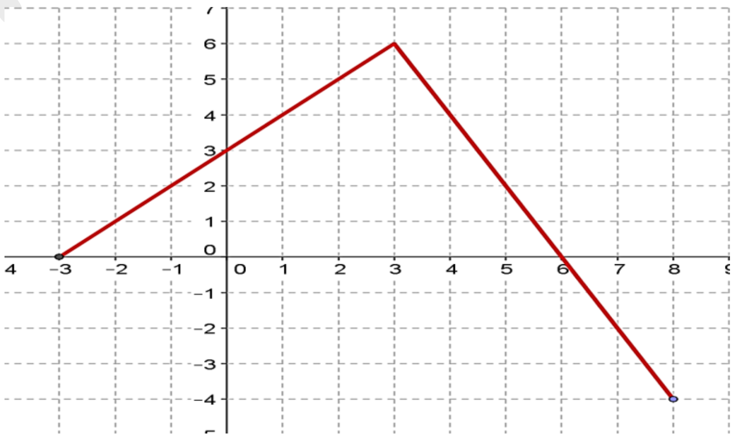
x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ) Είναι τα σημεία (-1,0), (1,0),(4,0) με τον x΄x και το (0,-1) με τον y΄y.

δ) τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές είναι :

$(-1,1)\cup(4,6]$

1305.



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 6)**
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**-3**	**-1**	**0**	**3**		
y					**-2**	**-4**

(Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. **(Μονάδες 6)**
δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Οι προβολές όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον άξονα x΄x , δημιουργούν το σύνολο $[-3,8]$, άρα $A_f = [-3,8]$

β)

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Είναι τα σημεία (-3,0),(6,0) με τον x΄x και το (0,3) με τον y΄y.

δ) Είναι στο διάστημα (-3,6).

1307.**Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$,**
α) να δείξετε ότι $\mu = -6$. **(Μονάδες 9)**
β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 9)**
γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης . **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή το σημείο $A(1,-4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι

$$g(1) = -4 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + \mu}{1+1} = -4 \Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2} = -4 \Leftrightarrow \mu - 2 = -8 \Leftrightarrow \mu = -6$$

β) Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $A_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

γ) Για $\mu = -6$ είναι: $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{x+1} = \dfrac{2\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{x+1}} = 2(x-3) = 2x - 6$

Το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-6) = 16 + 48 = 64 = 8^2$

και ρίζες $x_1 = \dfrac{4+8}{2\cdot 2} = \dfrac{12}{4} = 3$ και $x_2 = \dfrac{4-8}{2\cdot 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$. Άρα $2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

1345.Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y . (Μονάδες 9)

Λύση

α) Πρέπει $x\neq 3$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$

β) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=x-2$

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$
Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο Α(2,0).
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο (0,f(0)). Είναι $f(0)=0-3=-3$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το $B(0,-3)$.

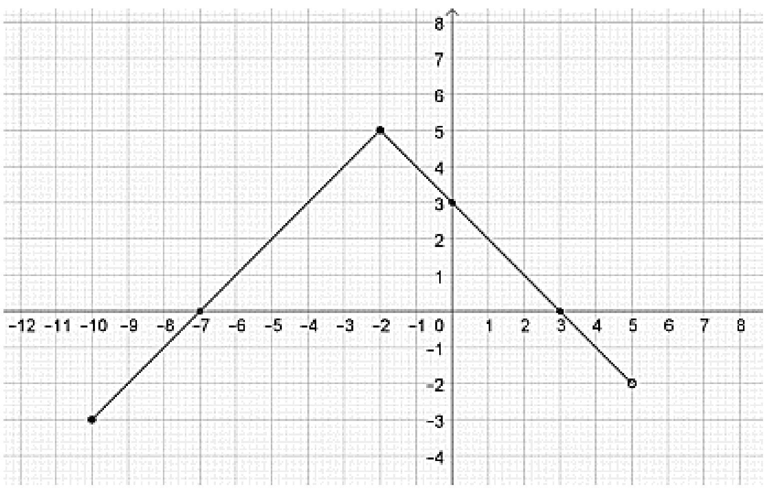
1358.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-15=1-2-15=-16$,
$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=-15$, $f(1)=1^2+2\cdot 1-15=-12$
$f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-15=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-5$
Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $A(-5,0)$ και $B(3,0)$.
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $(0,f(0))$. Είναι $f(0)=-15$,άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $\Gamma(0,-15)$.

12910. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της f(A). (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3). (Μονάδες 6)
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0. (Μονάδες 4)
δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x



για τις οποίες f(x) < 0. (Μονάδες 7)

Λύση

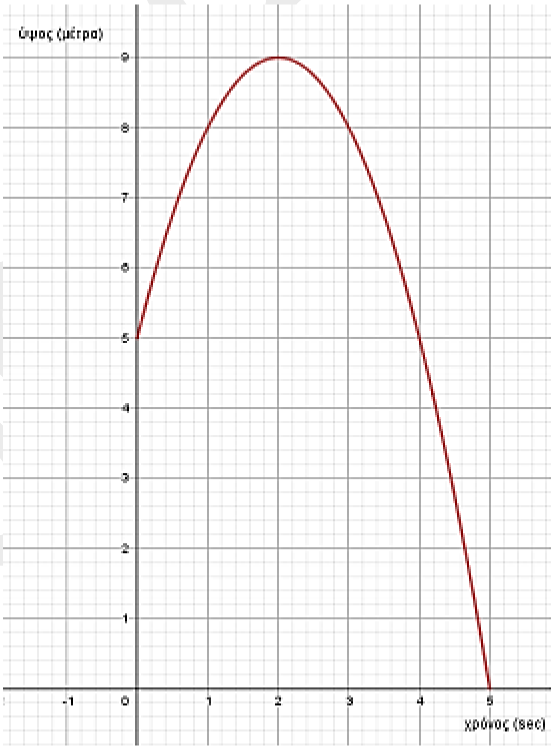
α) $A = [-10,5)$ και $f(A) = [-3,5]$.

β) $f(-2) = 5,\ f(0) = 3,\ f(3) = 0$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x, οπότε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ή $x = 3$

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x, οπότε: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10,-7) \cup (3,5)$.

12729. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



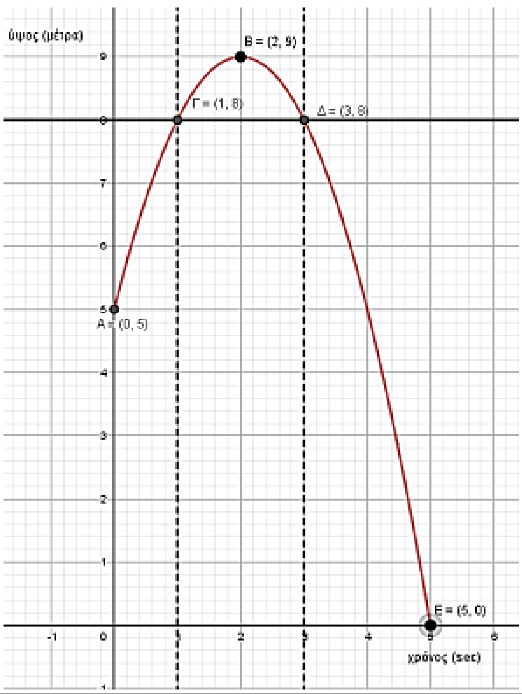
α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή; (Μονάδες 6)

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; (Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος. (Μονάδες 7)

δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος. (Μονάδες 6)

Λύση



α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο Α(0,5). Οπότε για τη χρονική στιγμή t_1=0 sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο Β (2,9). Οπότε για τη χρονική στιγμή t_2=2 sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία y=8 που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το Γ(1,8) και Δ(3,8). Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές t_3=1 sec και t_4=3 sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα x΄x (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα x΄x, το Ε που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_5=5 sec.

12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 7)
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

β) Το σημείο Μ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν
$f(4)=3 \Leftrightarrow \dfrac{4-1}{\sqrt{4}-1}=3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{1}=3$ που ισχύει

γ) Επειδή το -1 που είναι η τετμημένη του σημείου Ν δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, το σημείο Ν δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν
$f(2)=4 \Leftrightarrow \dfrac{2\cdot 2}{2-1}=4 \Leftrightarrow \dfrac{4}{1}=4$ ισχύει

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.
Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στην αρχή Ο.

13322. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για x=1, x = - 2, x = 2. (Μονάδες 9)
γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y΄y άξονα; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $x^2+2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -2$ που ισχύει. Άρα $A_f=[1,+\infty)$.

β) Είναι $g(1)=\dfrac{1}{1^2+2}+\sqrt{1-1}=\dfrac{1}{3}$, $g(2)=\dfrac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$
Επειδή το – 2 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της g, δεν ορίζεται η τιμή της για x = -2.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον y΄y άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

4ο θέμα

1393.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. **(Μονάδες 10)**

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Η τετμημένη του κοινού σημείου βρίσκεται από την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow$

$(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$. Τότε $f(-1)=g(-1)=0$, άρα κοινό σημείο είναι το $M(-1,0)$.

β) Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,h έχουμε:

$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha\Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0$ (1).

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(2-\alpha)=4-8+4\alpha=4\alpha-4=4(\alpha-1)$

i) Αν $\alpha>1$, τότε $\Delta>0$ και η (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες , άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$ και η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

1408.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. **(Μονάδες 8)**

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; **(Μονάδες 8)**

γ) Αν $\lambda\neq2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$ **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=\lambda x+1-\lambda\Leftrightarrow x^2-\lambda x-1+\lambda=0$

$\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot(-1+\lambda)=\lambda^2+4-4\lambda=(\lambda-2)^2\geq0$

Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-\lambda x-1+\lambda=0$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για $\lambda=2$ είναι $\Delta=0$, τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα την $x=\frac{\lambda}{2}=\frac{2}{2}=1$ και $f(1)=g(1)=1$.

Επομένως έχουν κοινό σημείο το (1,1).

γ) Από τις σχέσεις Vieta : $S=x_1+x_2=\lambda$ και $P=x_1\cdot x_2=-1+\lambda$

Άρα : $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2\Leftrightarrow\lambda^2-|\lambda|-2=0\Leftrightarrow|\lambda|^2-|\lambda|-2=0$ (1)

Θέτουμε $|\lambda|=\omega$ (2) , τότε $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\omega^2-\omega-2=0\Leftrightarrow\omega=-1$ ή $\omega=2$

$(2)\overset{\omega=-1}{\Rightarrow}|\lambda|=-1$ αδύνατη και $(2)\overset{\omega=2}{\Rightarrow}|\lambda|=2\overset{\lambda\neq 2}{\Leftrightarrow}\lambda=-2$

1433.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1, 2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}: f(1)=2\Leftrightarrow \cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}+\cancel{2}=\cancel{2}\Leftrightarrow 0=0$ ισχύει.

β) i)Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, είναι: $f(1)=g(1)\Leftrightarrow 2=1^2-\alpha+3\Leftrightarrow 2=1-\alpha+3\Leftrightarrow \alpha=2$

ii) Για $\alpha=2$ είναι : $f(x)=2x$ και $g(x)=x^2+1$.

Για να βρούμε αν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x=x^2+1\Leftrightarrow x^2+1-2x=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

Άρα δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g.

γ) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \alpha x\cancel{-\alpha}+2=x^2\cancel{-\alpha}+3\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$

Για να έχουν δύο σημεία τομής πρέπει

$\Delta>0\Leftrightarrow(-\alpha)^2-4\cdot1\cdot1>0\Leftrightarrow\alpha^2>4\Leftrightarrow|\alpha|>2\Leftrightarrow\alpha>2$ ή $\alpha<-2$

1454.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Πρέπει $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,και αυτό ισχύει όταν

$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{\alpha}{4}\leq 0\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 1$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}$. Πρέπει $\frac{\alpha}{4}\geq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 0$, τότε

$\sqrt{\frac{\alpha}{4}^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1$

Αν $\alpha=1$ τότε : $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$

γ) $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1$ ή $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0$

1470.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\alpha=1$ είναι $g(x)=x+1$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2\cancel{+1}=x\cancel{+1}\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

$f(0)=g(0)=1$ και $f(1)=g(1)=2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Α(0,1) και Β(1,2).

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+1=x+\alpha\Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$

Για να τέμνονται σε δυο σημεία θα πρέπει

$\Delta>0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot1\cdot(1-\alpha)>0\Leftrightarrow1-4+4\alpha>0\Leftrightarrow4\alpha>3\Leftrightarrow\alpha>\frac{3}{4}$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Για $\alpha>\frac{3}{4}$ έχει δύο ρίζες x_1,x_2 πραγματικές και άνισες.

Από τις σχέσεις Vieta : $P=x_1\cdot x_2=1-\alpha<0$, άρα οι x_1,x_2 είναι ετερόσημες.

1485.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $A_f=A_g=\mathbb{R}$

Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x λύνουμε την ανίσωση:

$f(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^2-4>0\Leftrightarrow(x-1)^2>4\Leftrightarrow|x-1|>2\Leftrightarrow x-1>2\Leftrightarrow x>3$ ή $x-1<-2\Leftrightarrow x<-1$

β) $|x-1|\geq0\Leftrightarrow|x-1|+2\geq2>0\Rightarrow g(x)>0$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2-4=|x-1|+2 \Leftrightarrow |x-1|^2-|x-1|-6=0$ (1) Θέτουμε $|x-1|=\omega>0$ (2)

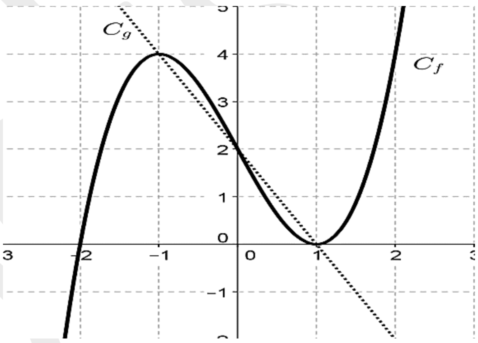
$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\omega^2-\omega-6=0 \Leftrightarrow \omega=-2$ Απορρίπτεται $(\omega>0)$ ή $\omega=3$

$(2)\overset{\omega=3}{\Rightarrow}|x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$ ή $x-1=-3 \Leftrightarrow x=-2$

$g(4)=|4-1|+2=3+2=5=f(4)$, $g(-2)=|-2-1|+2=3+2=5=f(-2)$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα A(4,5) και B(-2,5).

1490.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:



α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

Λύση

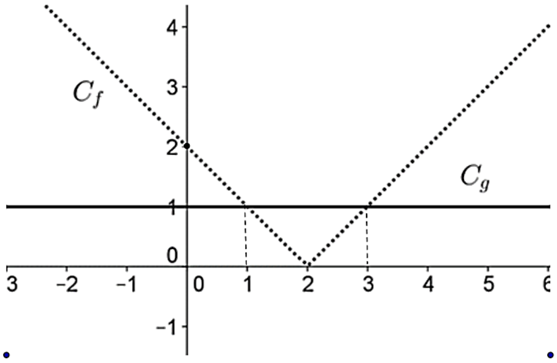
α) Πρόκειται για τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Είναι $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$

β) $f(-1)=4$, $f(0)=2$ και $f(1)=0$

γ) $x \in (-1,0)\cup(1,+\infty)$

δ) Πρέπει $f(x)+2x-2\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge -2x+2 \Leftrightarrow x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$

1514.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g. (Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα A(-1,1) και B(3,1)

ii) $x \in (1,3)$

β) i) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ ή $x-2=-1 \Leftrightarrow x=1$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα A(-1,1) και B(3,1)

ii) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3 \Leftrightarrow x\in(1,3)$

γ) Πρέπει $1-f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\in[1,3]$ και $f(x)\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 2$

Άρα η παράσταση Α έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x\in[1,2)\cup(2,3]$

1524.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y . **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Πρέπει $2x-3\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne 3 \Leftrightarrow x\ne \dfrac{3}{2}$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

β) Το τριώνυμο $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha$, έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\left[-2(\alpha+3)\right]^2-4\cdot 4\cdot 3\alpha=4(\alpha^2+6\alpha+9)-48\alpha=4\alpha^2+24\alpha+36-48\alpha=4\alpha^2-24\alpha+36=(2\alpha-6)^2$$

και ρίζες $x_1=\dfrac{2(\alpha+3)+2\alpha-6}{2\cdot 4}=\dfrac{2\alpha\cancel{+6}+2\alpha\cancel{-6}}{8}=\dfrac{4\alpha}{8}=\dfrac{\alpha}{2}$ και

$x_2=\dfrac{2(\alpha+3)-(2\alpha-6)}{2\cdot 4}=\dfrac{\cancel{2\alpha}+6\cancel{-2\alpha}+6}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

Είναι $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=(2x-\alpha)(2x-3)$

και $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\dfrac{(2x-\alpha)\cancel{(2x-3)}}{\cancel{2x-3}}=2x-\alpha$

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$ είναι:

$f(1)=-1 \Leftrightarrow 2-\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=3$

δ) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\alpha=0 \Leftrightarrow 2x=\alpha \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$

Αν $\dfrac{\alpha}{2}\ne\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\ne 3$.Έχει σημείο τομής με τον άξονα x΄x το σημείο $A\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

Αν $\alpha=3$ δεν έχει σημείο τομής με τον x΄x.

Είναι $f(0)=-\alpha$, άρα έχει σημείο τομής το σημείο Β(0,-α)

13027.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta$, $g(x)=x+\beta$ όπου $x\in\mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός.

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2},-3-\frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι β = − 1. **(Μονάδες 6)**

β) Για β = − 1

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες x΄x, y΄y. **Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. **(Μονάδες 7)**

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-2kg(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, ισχύει ότι:

$$g\left(\frac{3\beta}{2}\right)=-3-\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\frac{3\beta}{2}+\beta=-3-\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow 3\beta+2\beta=-6-\beta\Leftrightarrow 6\beta=-6\Leftrightarrow\beta=-1$$

β) i) Είναι $f(x)=x^2-1$

Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y=f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$. Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x είναι τα Α(1 , 0) και Β(-1 , 0).

Επίσης $f(0)=0^2-1=-1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της fτέμνει τον άξονα y′y είναι το Γ(0 , -1).

ii. Η η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ όταν $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-1<x-1\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x(x-1)<0$

Το x^2-x είναι $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες 0 και 1, οπότε με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων, είναι $x^2-x<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2-x	+	0	-	0	+

iii. $f(x)-2kg(x)\geq0\Leftrightarrow x^2-1-2k(x+1)\geq0\Leftrightarrow x^2-1-2kx-2k\geq0\Leftrightarrow x^2-2kx-2k-1\geq0$

Η τελευταία είναι $2^{ου}$ βαθμού με συντελεστή στο x^2 το α = 1 >0, οπότε η ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\Delta\leq0\Leftrightarrow(-2k)^2-4\cdot1\cdot(-2k-1)\leq0\Leftrightarrow4k^2+8k+4\leq0\Leftrightarrow4(k^2+2k+1)\leq0\Leftrightarrow$

$4(k+1)^2\leq0\Leftrightarrow k+1=0\Leftrightarrow k=-1$

13030.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. **(Μονάδες 10)**

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g. **(Μονάδες 7)**

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2-4x-5\geq0$

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
x^2-4x-5	+	0	-	0	+

Το τριώνυμο x^2-4x-5 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=36$ και ρίζες

$x_1=\dfrac{4+\sqrt{36}}{2}=5,\ x_2=\dfrac{4-\sqrt{36}}{2}=-1$.

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι $x^2-4x-5\ge0\Leftrightarrow x\le-1$ ή $x\ge5$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$.

Η συνάρτηση g δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_g=\mathbb{R}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x-5}=|x+3|\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2=(x+3)^2\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-4x-5=\cancel{x^2}+6x+9\Leftrightarrow-4x-6x=9+5\Leftrightarrow-10x=14\Leftrightarrow x=-\dfrac{14}{10}=-\dfrac{7}{5}$

Είναι $g\left(-\dfrac{7}{5}\right)=\left|-\dfrac{7}{5}+3\right|=\left|-\dfrac{7}{5}+\dfrac{15}{5}\right|=\dfrac{8}{5}$, οπότε κοινό σημείο είναι το $\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{8}{5}\right)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g είναι οι λύσεις της ανίσωσης

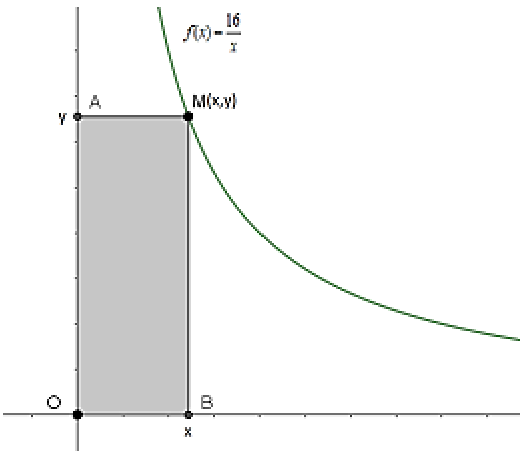
$f(x)<g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x-5}<|x+3|\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2<(x+3)^2\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-4x-5<\cancel{x^2}+6x+9\Leftrightarrow-4x-6x<9+5\Leftrightarrow-10x<14\Leftrightarrow x>-\dfrac{14}{10}=-\dfrac{7}{5}$.

Όμως, λόγω του πεδίου ορισμού της f, είναι $x\le-1$ ή $x\ge5$, οπότε με συναλήθευση προκύπτει

$x\in\left(-\dfrac{7}{5},-1\right]\cup[5,+\infty)$.

13090.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{16}{x}$, $x>0$.



Ένα σημείο Μ(x, y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\dfrac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους. **(Μονάδες 7)**

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4. **(Μονάδες 4)**

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\ge\Pi(4)$ για κάθε $x>0$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι $y=\frac{16}{x}$.

Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $A(0,y)$ και $B(x,0)$, το εμβαδόν του ΟΑΜΒ είναι $(OAMB)=(OB)(OA)=x\cdot y=x\cdot\frac{16}{x}=16$ τετραγωνικές μονάδες και η περίμετρός του είναι $\Pi(x)=2(OB)+2(OA)=2x+\frac{32}{x},\ x>0$.

β) $\Pi(x)=20\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}=20\Leftrightarrow 2x^2+32=20x\Leftrightarrow x^2+16=10x\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot16=36$ και ρίζες $x_1=\frac{10+\sqrt{36}}{2}=8,\ x_2=\frac{10-\sqrt{36}}{2}=2$.

Για x = 8 είναι $y=\frac{16}{8}=2$, άρα Μ(8,2) και για x = 2 είναι $y=\frac{16}{2}=8$, δηλαδή Μ(2,8).

γ) i. Το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο όταν $(OA)=(OB)\Leftrightarrow x=\frac{16}{x}\Leftrightarrow x^2=16\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

Είναι $\Pi(x)\geq\Pi(4)\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq 2\cdot4+\frac{32}{4}\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq 8+8\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq 16\Leftrightarrow$

$2x^2+32\geq 16x\Leftrightarrow x^2+16\geq 8x\Leftrightarrow x^2-8x+16\geq 0\Leftrightarrow (x-4)^2\geq 0$ ισχύει

12628.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-x-1$ και $g(x)=3-x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της g και έχει x = 0, οπότε $g(0)=3-0=3$, άρα Α(0,3).

Τα σημεία Β και Γ είναι κοινά σημεία των C_f, C_g, οπότε οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-x-1=3-x\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$.

Για $x=2$ είναι $g(2)=3-2=1$, άρα Γ(2,1) και για x = - 2 είναι $g(-2)=3-(-2)=5$ άρα Β(-2,5).

Το σημείο Ζ βρίσκεται στη C_f και έχει y = 0, άρα $x^2-x-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5$ και ρίζες $x_1=\frac{1+\sqrt5}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

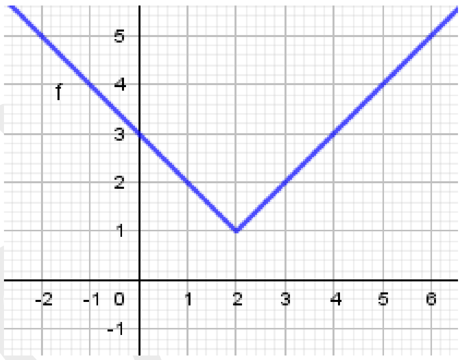
Επειδή $x_Z<0$, είναι $x_Z=\frac{1-\sqrt5}{2}$, οπότε $Z\left(\frac{1-\sqrt5}{2},0\right)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 3 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$

γ) Είναι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| = |f(\alpha) + g(\alpha)| = |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| = |\alpha^2 - 2\alpha + 2| = |\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1| =$

$$|(\alpha-1)^2 + 1| = (\alpha-1)^2 + 1 \geq 1 \text{ γιατί } (\alpha-1)^2 \geq 0$$



12914. Έστω η ευθεία ε: y = c, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία; **(Μονάδες 4)**

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i). **(Μονάδες 5)**

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$. **(Μονάδες 8)**

γ) i. Αν Α, Β τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $(AB) \leq 2$; **(Μονάδες 4)**

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i). **(Μονάδες 4)**

Λύση

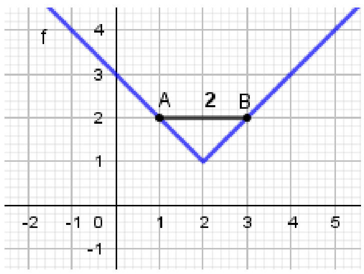
α) i. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, από το σχήμα προκύπτει ότι έχει κοινά σημεία με την C_f όταν $c \geq 1$.

ii. $f(x) = c \Leftrightarrow |x-2| + 1 = c \Leftrightarrow |x-2| = c - 1$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x-2| \geq 0$, η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν και $c - 1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β) Για $c \geq 1$ είναι $|x-2| = c - 1 \Leftrightarrow (x - 2 = c - 1 \Leftrightarrow x = c + 1)$ ή $(x - 2 = -c + 1 \Leftrightarrow x = 3 - c)$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$



γ) i. Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1 \leq c \leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι $(AB) = |c + 1 - (3 - c)| = |c + 1 - 3 + c| = |2c - 2|$

Είναι $(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2c \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2$.

όμως από το α σκέλος είναι $c \geq 1$, άρα $1 \leq c \leq 2$.

12941.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f. (Μονάδες 6)
α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες. (Μονάδες 6)
δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

Λύση

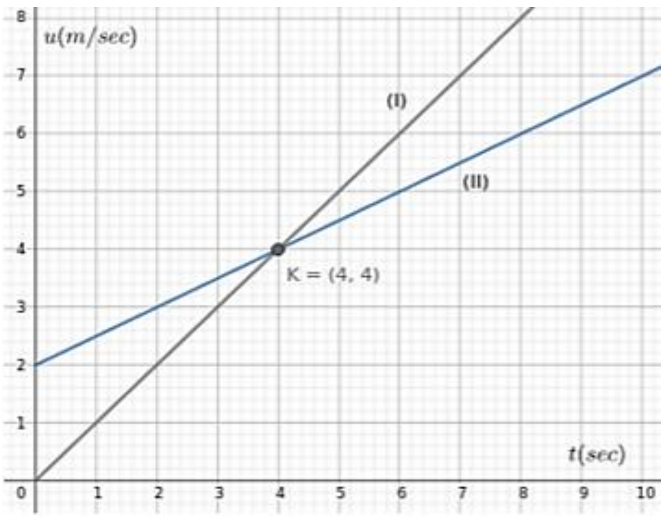
α) Για να ορίζεται η f πρέπει $3-|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$.

β) Είναι $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}=\dfrac{9-|x|^2}{3-|x|}=f(x)=\dfrac{\cancel{(3-|x|)}(3+|x|)}{\cancel{3-|x|}}=3+|x|$

γ) Για $y=0$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 3+|x|=0 \Leftrightarrow |x|=-3$ αδύνατη. Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.
Είναι $f(0)=3+|0|=3$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,3).

δ) Αρκεί για κάθε $x\neq \pm 3$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει ακριβώς μια λύση. Είναι
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \cancel{3}+|x|=\cancel{3}-x^2 \Leftrightarrow |x|=-|x|^2 \Leftrightarrow |x|^2+|x|=0 \Leftrightarrow |x|(|x|+1)=0 \Leftrightarrow$
$(|x|=0 \Leftrightarrow x=0)$ ή $(|x|+1=0 \Leftrightarrow |x|=-1 \text{ αδύνατη})$
Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το (0, 3).

12999.Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+\alpha\cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.
α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. (Μονάδες 6)
β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.
Οι παρακάτω ευθείες (Ι),(ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



i) Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β; (Μονάδες 6)
ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t\in[3,5]$. (Μονάδες 7)
iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του. (Μονάδες 6)

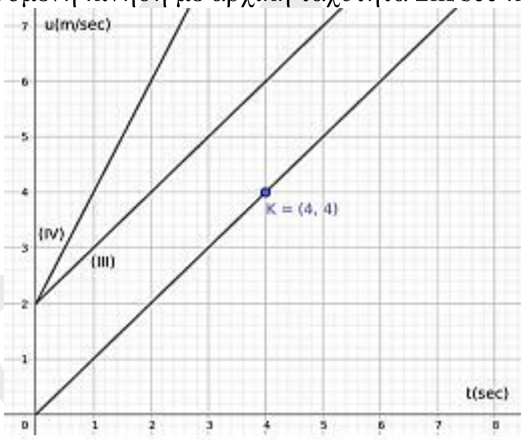
Λύση

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u.
Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι $t \in [0,+\infty)$.

β) i) Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (Ι). Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (ΙΙ).

ii) Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4 sec το όχημα της γραμμής (ΙΙ) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή t=4sec τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (Ι) κινείται ταχύτερα.

iii) Επειδή το όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητά του θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, οπότε η ευθεία (ΙΙΙ) δεν τέμνει την ευθεία (Ι) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο Λ(0,2), θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας (Ι).
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ευθείες:
- η (ΙΙΙ) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ
- η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.



13120.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4,4) ως προς τον άξονα x΄x να ανήκει στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x . (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x′x θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=(\lambda-1)^2-4\cdot1\cdot(-4\lambda^2)=(\lambda-1)^2+16\lambda^2$.

Επειδή για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta>0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P=-4\lambda^2<0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda\neq0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα x′x είναι το A′(4, −4) και ανήκει στη γραφική παράσταση της f όταν $f(4)=-4\Leftrightarrow16-4(\lambda-1)-4\lambda^2=-4\overset{:4}{\Leftrightarrow}4-\lambda+1-\lambda^2=-1\Leftrightarrow0=\lambda^2+\lambda-6$.

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25$ και ρίζες

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2,\ \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3.$$

δ) Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=x^2+2x-4$

Πρέπει $f(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x-4<0$

Το τριώνυμο x^2+2x-4 έχει Δ= 20 και ρίζες

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=\frac{-2+\sqrt{4\cdot 5}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=\frac{2\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}=-1+\sqrt{5},$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=\frac{-2-\sqrt{4\cdot 5}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2}=\frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2}=-1-\sqrt{5}$$

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x-4<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$. (Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο Α. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^3-x\neq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$, άρα $A=\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}$.

β) Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f, η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^7-x}{x^3-x}=0 \Leftrightarrow x^7-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^6-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται ή

$x^6=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ απορρίπτονται. Άρα η C_f δεν τέμνει ούτε τον άξονα x΄x.

γ) $$f(x)=\frac{x^7-x}{x^3-x}=\frac{\cancel{x}\left(x^6-1\right)}{\cancel{x}\left(x^2-1\right)}=\frac{\left(x^2\right)^3-1^3}{x^2-1}=\frac{\cancel{\left(x^2-1\right)}\left[\left(x^2\right)^2+x^2\cdot 1+1^2\right]}{\cancel{x^2-1}}=x^4+x^2+1$$

δ) $f(x)=3 \Leftrightarrow x^4+x^2+1=3 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0\ (1)$

Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2[ου] βαθμού με διακρίνουσα Δ= 9 και ρίζες ω = 1 δεκτή ή ω = -2 απορρίπτεται

Τότε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ απορρίπτονται, οπότε η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο Α.

Η συνάρτηση y=αx+β

2ο θέμα

1241.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 6), Β(-1, 4), να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν α=1 και β=5, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 6) αν και μόνο αν:
$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha \ (1)$
Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Β(– 1, 4) αν και μόνο αν:
$f(-1) = 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta = 4 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha + 6 - \alpha = 4 \Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$
Αντικαθιστούμε την τιμή α = 1 στη σχέση (1) και βρίσκουμε: $\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$
Για α = 1 και β = 5, ο τύπος της f γράφεται $f(x) = x + 5$.

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(– 5, 0).
Επίσης έχουμε: $f(0) = 0 + 5 = 5$ Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 5).

1275. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

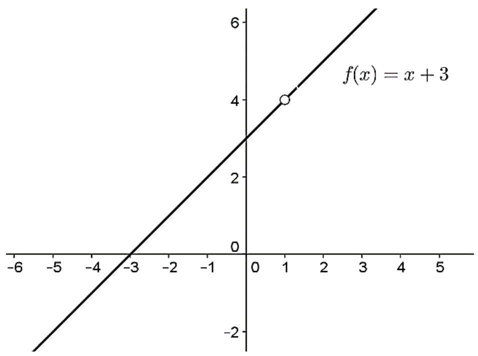
γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και 1, άρα $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

β) Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι : $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x + 3$$



γ) Επειδή είναι ευθεία, βρίσκουμε δύο σημεία της. Για $x = 0$, είναι $f(0) = 3$, άρα τέμνει τον y΄y στο $(0,3)$ και για $y = 0$ είναι $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, τέμνει τον x΄x στο $(-3,0)$.

1293.Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T(x) = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

Η θερμοκρασία είναι συνάρτηση του x, άρα $T(x) = 15 + 25 \cdot x$ (1)

α) Από την (1) για $x = 30$: $T(30) = 15 + 25 \cdot 30 = 15 + 750 = 765\ ^\circ C$

β) Από την (1) για T(x) =290 : $290 = 15 + 25 \cdot x \Leftrightarrow 25x = 275 \Leftrightarrow x = \dfrac{275}{25} = 11\,km$

γ) $T(x) > 440 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow 25x > 425 \Leftrightarrow x > \dfrac{425}{25} \Leftrightarrow x > 17\,km$

1294. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. **(Μονάδες 7)**

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 8)**

Λύση

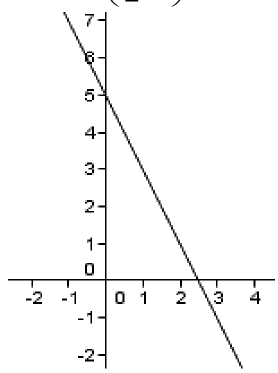
α) $f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 3 \overset{\beta=5}{\Leftrightarrow} \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -2$, $f(0) = 5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$

β) Είναι $f(x) = -2x + 5$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημεία $A\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$.

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημεία (0,f(0)). Επειδή $f(0) = 5$ το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο Γ(0,5)



γ) Για τη κατασκευή της γραφικής παράστασης της f, αρκεί να χαράξουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

1301. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. **(Μονάδες 13)**

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. Είναι:

$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$f(0) = g(0) = 0,\ f(1) = g(1) = 1,\ f(-1) = g(-1) = -1$.

Άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Ο(0,0),Α(1,1) και Β(-1,-1)

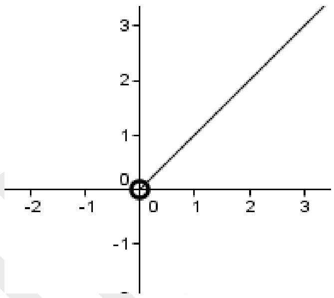
β) Είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων γιατί έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

1302. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$,για κάθε $x\in A$. **(Μονάδες 10)**
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Πρέπει $2|x|-6\neq 0 \Leftrightarrow 2|x|\neq 6 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$



β) $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}=\dfrac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=\dfrac{\cancel{2}|x|\cancel{(|x|-3)}}{\cancel{2}\cancel{(|x|-3)}}=|x|$

γ) Για $x>0$ είναι $f(x)=x$

12856. Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : $y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:
α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε. **(Μονάδες 6)**
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x; **(Μονάδες 7)**
β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) i. Επειδή ε//δ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση της ευθείας δ είναι -3. Άρα α=-3, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι α=-3<0

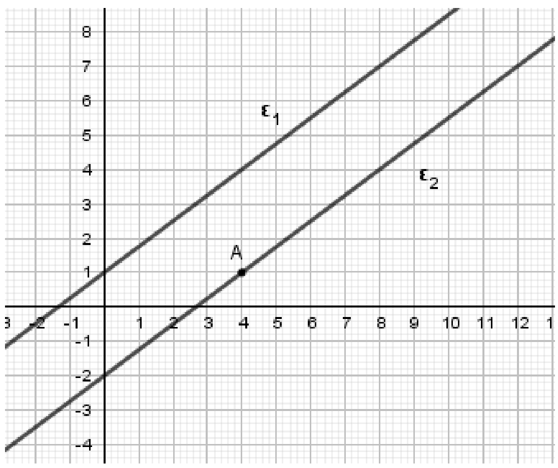
β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-3x+5$. Η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με τεταγμένη y=0.

Για y=0 έχουμε: $-3x+5=0 \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα x΄x είναι το $\left(\dfrac{5}{3},0\right)$.

Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τετμημένη x=0. Για x=0 έχουμε: y=5.
Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y΄y είναι το (0,5).

2.12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y=\dfrac{3}{4}x+1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2). **(Μονάδες 7)**
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). **(Μονάδες 9)**
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η ευθεία (ε_1) έχει κλίση $\alpha_1=\dfrac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2)

είναι παράλληλη στην ($ε_1$), οπότε έχει κλίση $α_2 = α_1 = \frac{3}{4}$.

β) Η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x + β$ και διέρχεται από το σημείο Α(4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + β \Leftrightarrow 1 = 3 + β \Leftrightarrow -2 = β$.

Άρα η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x - 2$.

γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, -2), αφού για x = 0 βρίσκουμε $y = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$.

Για y = 0 είναι: $0 = \frac{3}{4}x - 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$, οπότε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

12684. Η ευθεία ($ε_1$) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία ($ε_2$) διέρχεται από το σημείο Α (- 4, 1) και είναι παράλληλη στην ($ε_1$).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας ($ε_1$) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα y΄ y. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ($ε_2$) με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 7)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ($ε_2$). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει κλίση $α_1 = -\frac{1}{2}$.

Για x = 0 είναι $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$, οπότε η ($ε_1$) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, -2).

β) Η ευθεία ($ε_2$) είναι παράλληλη στην ($ε_1$), οπότε έχει κλίση $α_2 = α_1 = -\frac{1}{2}$.Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ($ε_2$) με τον x΄x άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$.

γ) Η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + β$ και διέρχεται από το σημείο Α(- 4, 1), οπότε

$1 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + β \Leftrightarrow 1 = 2 + β \Leftrightarrow β = -1$. Άρα η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Για x = 0 είναι $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ και για y = 0 είναι $0 = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$, οπότε η ($ε_2$) τέμνει τους άξονες στα σημεία (-2, 0) και (0, - 1).

12730. Δίνεται η ευθεία $y = αx + β$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = λx + κ$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη 2. **(Μονάδες 12)**

Λύση

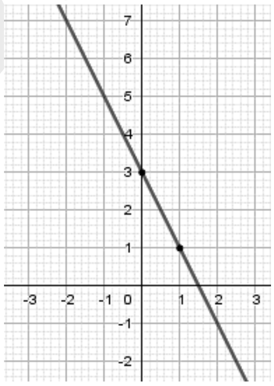
α) Αφού η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας α θα ισούται με α=εφ45^o . Άρα α=1, οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y=x+\beta$.
Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,3) θα ισχύει $3=0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$.
Άρα η ευθεία είναι η $y=x+3$.

β) Αφού οι ευθείες $y=x+3$ και $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα λ=1. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y=x+\kappa$.
Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(2,0) θα ισχύει $0=2+\kappa \Leftrightarrow \kappa=-2$.
Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y=x-2$.

12630. Δίνεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).
α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα y΄ y . (Μονάδες 8)
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha=-2$, οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $y=-2x+\beta$.
Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο (1,1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
Δηλαδή: $1=-2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow 3=\beta$, άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y=-2x+3$.



β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄ y στο σημείο (0, 3), αφού για x = 0 βρίσκουμε: $y=-2\cdot 0+3=3$

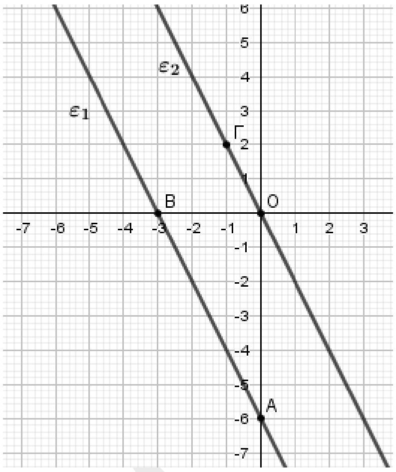
γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

12939.Έστω η ευθεία ε_2 :$y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο Α (0,- 6) και τον άξονα x΄x στο σημείο Β(-3, 0).
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο Α ισχύει ότι: $-6=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-6$
Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο Β ισχύει ότι: $0=\alpha\cdot\left(-3\right)-6 \Leftrightarrow -3\alpha-6=0 \Leftrightarrow -3\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

Άρα $\varepsilon_2 : y = -2x - 6$



β) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής y=αx.
Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία ε_2 έχει τύπο $y = -2x$.

γ) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α (0,- 6) και Β(-3,0). Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο Ο (0, 0) και Γ(-1,2). Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

13033.Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε). **(Μονάδες 4)**

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x΄x άξονα; **(Μονάδες 4)**

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε). **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k,5) να είναι σημείο της ευθείας (ε). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή α < 0 ισχύει εφω < 0 , οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για το σημείο Α: $1 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + 4 \Leftrightarrow 1 = -3 + 4$ ισχύει, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Β: $3 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \Leftrightarrow 3 = 1 + 4$ δεν ισχύει, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ: $0 = -\frac{1}{2} \cdot 8 + 4 \Leftrightarrow 0 = -4 + 4$ ισχύει, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Το σημείο (k,5) είναι σημείο της ευθείας, αν και μόνο αν $5 = -\frac{1}{2}k + 4 \Leftrightarrow 10 = -k + 8 \Leftrightarrow k = 8 - 10 = -2$

13178.Δίνεται το σημείο Μ(3,4) .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το Ο(0,0). **(Μονάδες 9)**

β) Δίνεται το σημείο Ν (- 3, λ) με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

ii. Αν Ν (- 3,- 4) να εξετάσετε αν τα σημεία Μ Ν, είναι συμμετρικά ως προς το Ο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν είναι ο άξονας y΄y είναι της μορφής $y = \alpha x$. Για να διέρχεται από το Μ πρέπει $4 = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$, οπότε είναι η $y = \frac{4}{3}x$.

β) i. Επειδή το Ν ανήκει στην ευθεία οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $\lambda = \frac{4}{3}(-3) \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ii. Επειδή τα σημεία Μ και Ν έχουν αντίθετες συντεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

13054. Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $y=(3\alpha+4)x-4$ και ε_2: $y=(3-4\alpha)x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών. (Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx'. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 13)

Λύση

α) i. Για α=1 είναι ε_1 : $y=(3\cdot 1+4)x-4=7x-4$ και ε_2: $y=(3-4\cdot 1)x+4=-x+4$.

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = 7>0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx' οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1<0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx' αμβλεία γωνία.

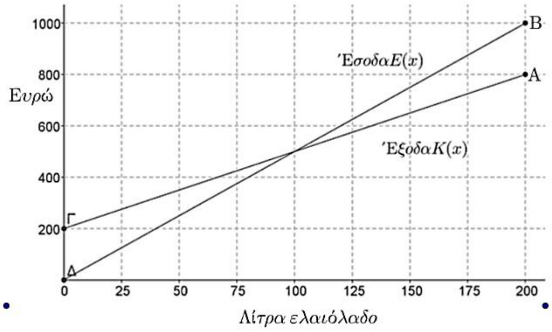
β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει

$$3\alpha+4=3-4\alpha \Leftrightarrow 3\alpha+4\alpha=3-4 \Leftrightarrow 7\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha=-\frac{1}{7}$.

4ο θέμα

1386. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.
Στο διπλανό παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα K(x) και τα έσοδα E(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων K(x) και E(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι (100,500), δηλαδή όταν πουλήσει 100 λίτρα λάδι δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία.

β) Τα αρχικά έξοδα της εταιρείας είναι : K(0) =200 ευρώ

γ)Για μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα περισσότερα από τα έξοδα, δηλαδή:
$E(x)>K(x) \Leftrightarrow x>100$ λίτρα

δ) Η ευθεία που περιγράφει τα έσοδα είναι της μορφής $y=\alpha x$ αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων .Το σημείο $B(200,1000)$ ανήκει στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν : $1000=\alpha\cdot 200 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1000}{200} \Leftrightarrow \alpha=5$ (1)

Επομένως ο τύπος της $E(x)$ είναι : $E(x) = 5x$.

Η ευθεία που περιγράφει τις ετήσιες δαπάνες είναι της μορφής $y = \beta x + \gamma$.

Τα σημεία $\Gamma(0,200), A(200,800)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν : $200 = \beta \cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 200$ (2)

$$800 = \beta \cdot 200 + \gamma \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 200\beta + 200 = 800 \Leftrightarrow 200\beta = 600 \Leftrightarrow \beta = \frac{600}{200} \Leftrightarrow \beta = 3$$

Επομένως ο τύπος της $K(x)$ είναι : $K(x)=3x+200$

$E(x) > K(x) \Leftrightarrow 5x > 3x + 200 \Leftrightarrow 2x > 200 \Leftrightarrow x > 100$ λίτρα

Άρα οι εκτιμήσεις στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

1398.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 6)**

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (−3, 0). **(Μονάδες 4)**

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. **(Μονάδες 8)**

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το A(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄xείναι το σημείο $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

β) Τα σημεία (3,0) και (-3,0) ανήκουν στον άξονα x΄x .Από το α) ερώτημα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x μόνο στο σημείο B.
Άρα δεν τέμνει τους άξονες (τον x΄x) σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (−3, 0).

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο Γ(0,2)
Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο σημείο Δ(0,-9)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2}$$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $E\left(\frac{3}{2}, 0\right), Z\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Επομένως τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες.

δ) Έστω h(x)=αx+β.
Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο A έχουμε : $3 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$
Επειδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox , δηλαδή στο σημείο $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, ισχύει ότι:

$$0 = \alpha \cdot \frac{3}{2} + \beta \Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot \frac{3}{2} + 3 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -2$$. Επομένως $h(x) = -2x + 3$.

1403. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. **(Μονάδες 7)**

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y ΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Πρέπει : $9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$, άρα $A_f=(-3,3)$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο $A(-2,0)$.

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία (0,f(0)).

Είναι $f(0)=\dfrac{0+2}{\sqrt{9-0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω (ε) : $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Τότε επειδή το σημείο Α ανήκει στην ευθεία, έχουμε: $0=-2\alpha+\beta$ (1) και επειδή το σημείο Β ανήκει στην (ε):: $\dfrac{2}{3}=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{2}{3}$ (2).

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}-2\alpha+\dfrac{2}{3}=0\overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow}-4\alpha+2=0 \Leftrightarrow -4\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$. Άρα (ε) : $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}$

1410.Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. **(Μονάδες 5)**

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\dfrac{3}{4}x$. **(Μονάδες 7)**

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. **(Μονάδες 4)**

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. **(Μονάδες 9)**

Λύση

Με τα δεδομένα του προβλήματος η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει ύπτιο έχει τύπο $\alpha(x)=9x$,

(x ο χρόνος σε λεπτά)και η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει πεταλούδα έχει τύπο $\beta(x)=12x$

(x ο χρόνος σε λεπτά).

α) Όταν κολυμπάει ύπτιο 32 λεπτά καίει $\alpha(32)=9\cdot 32=288$ θερμίδες

Πρέπει να κάψει ακόμη 360- 288=72 θερμίδες κολυμπώντας πεταλούδα.

Θα κολυμπήσει δηλαδή 6 λεπτά ($\beta(x)=72 \Leftrightarrow 12x=72 \Leftrightarrow x=6$ λεπτά)

β) i) Όταν κολυμπάει ύπτιο x λεπτά καίει $\alpha(x)=9x$ θερμίδες

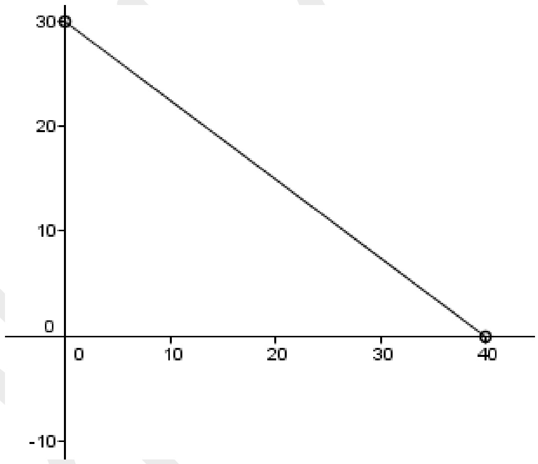
Όταν κολυμπάει πεταλούδα $f(x)=y$ λεπτά καίει $\beta(y)=12y$ θερμίδες

$$\alpha(x)+\beta(y)=360 \Leftrightarrow 9x+12y=360 \overset{(:3)}{\Leftrightarrow} 3x+4y=120 \Leftrightarrow$$

$$4y=120-3x \Leftrightarrow y=\frac{120-3x}{4} \Leftrightarrow y=\frac{120}{4}-\frac{3x}{4} \Leftrightarrow f(x)=30-\frac{3}{4}x$$

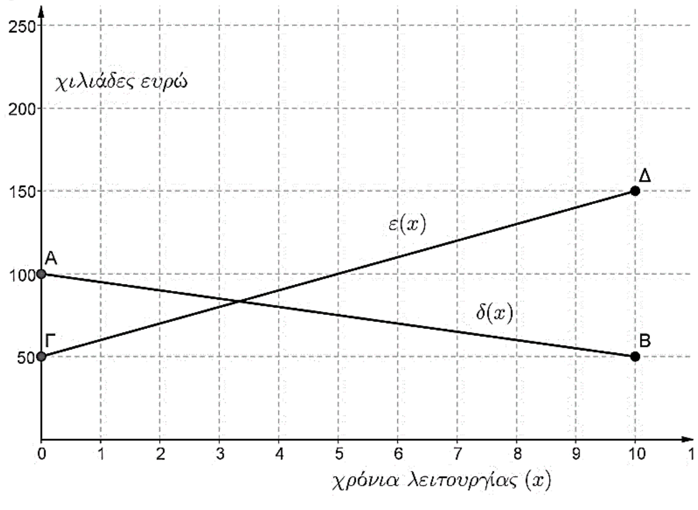
ii) Είναι $x\geq 0$ και $y\geq 0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x\geq 0 \Leftrightarrow 30\geq\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 120\geq 3x \Leftrightarrow x\leq 40$,

άρα $0\leq x\leq 40$ λεπτά



γ) Τα σημεία τομής με τους άξονες x΄x , y΄yείναι τα σημεία Β(40,0) και Α(0,30) αντίστοιχα. Στο σημείο Β κολυμπάει μόνο ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες. Στο σημείο Α κολυμπάει μόνο πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

1434. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.
(Μονάδες 4)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.
(Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Τα έσοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας είναι: $\varepsilon(5)=100$ χιλιάδες ευρώ και τα έξοδα : $\delta(5)=75$ χιλιάδες ευρώ .

β) i) Η ευθεία που περιγράφει τα έσοδα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$.

Τα σημεία $\Gamma(0,50), \Delta(10,150)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν :

$50 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 50 \ (1)$

$150 = \alpha \cdot 10 + \beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10\alpha + 50 = 150 \Leftrightarrow 10\alpha = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$

Επομένως ο τύπος της $\varepsilon(x)$ είναι : $\varepsilon(x) = 10x + 50$

$\varepsilon(5) = 10 \cdot 5 + 50 = 50 + 50 = 100$ χιλιάδες ευρώ

Η ευθεία που περιγράφει τις ετήσιες δαπάνες είναι της μορφής $y = \gamma x + \delta$.

Τα σημεία $A(0,100), B(10,50)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν :

$100 = \gamma \cdot 0 + \delta \Leftrightarrow \delta = 100 \ (2)$

$50 = \gamma \cdot 10 + \delta \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 10\gamma + 100 = 50 \Leftrightarrow 10\gamma = -50 \Leftrightarrow \gamma = -5$

Επομένως ο τύπος της $\delta(x)$ είναι : $\delta(x) = -5x + 100$

Είναι $\delta(5) = -5 \cdot 5 + 100 = -25 + 100 = 75$ χιλιάδες ευρώ. Άρα οι εκτιμήσεις στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ λύνουμε το σύστημα των $\delta(x)$ και $\varepsilon(x)$:

$$\begin{cases} y = 10x + 50 \\ y = -5x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10x + 50 \\ 10x + 50 = -5x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10x + 50 \\ 15x = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 10x + 50 \\ x = \dfrac{50}{15} = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \cdot \dfrac{10}{3} + 50 \\ x = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{3} + 50 \\ x = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{250}{3} \\ x = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Άρα στα 3 χρόνια και 120 ημέρες λειτουργίας της η εταιρεία δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

1444. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(0,2). (Μονάδες 3)

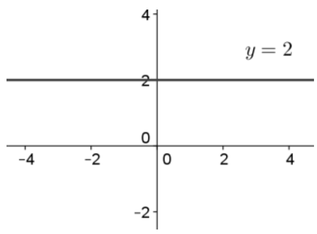
β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο B(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $f(0) = (\lambda+1) \cdot 0^2 - (\lambda+1) \cdot 0 + 2 = 2$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(0,2) για οποιαδήποτε τιμή του λ



β) Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = 2$ και η γραφική της παράσταση είναι η οριζόντια ευθεία $y = 2$.

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο B(2, 0) ισχύει ότι:

$f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = (\lambda+1) \cdot 2^2 - (\lambda+1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$4(\lambda+1) - 2\lambda \cancel{-2} \cancel{+2} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2$

Για $\lambda = -2$ είναι $f(x) = -x^2 + x + 2$

Για να βρούμε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9 = 3^2$

Οι ρίζες είναι : $x_1=\dfrac{-1+3}{2\cdot(-1)}=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-1-3}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-4}{-2}=2$

Άρα τέμνει τον άξονα x΄x και στο σημείο Γ(-1,0).

δ) Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=2x^2-x+2$, $\Delta=(-2)^2-4\cdot2\cdot2=4-16=-12<0$

Άρα $f(x)>0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

1446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 5)**

β)Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. **(Μονάδες 10)**

γ)Έστω Μ(x , y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$, άρα $x^2+x+1>0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. Άρα δεν τέμνει τον x΄x.

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ λύνουμε την ανίσωση : $f(x)<2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-x-2 είναι οι αριθμοί -1 και 2.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Η λύση της ανίσωσης είναι : $x\in(-1,2)$

γ) $|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow -2<2x<4 \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} -1<x<2$.

Όπως δείξαμε στο β) ερώτημα το σημείο Μ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$

1447. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq0\end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y' y . **(Μονάδες 3)**

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. **(Μονάδες 5)**

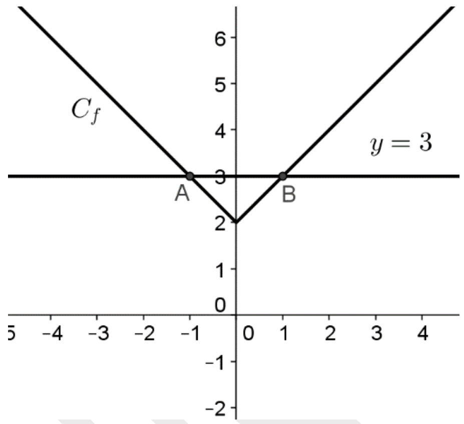
ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 4)**

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία (0,f(0)). Είναι $f(0)=0+2=2$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B(0,2)$.



β) i)Τα σημεία τομής είναι τα σημεία Α(-1,3) και Β(1,3).

ii) Έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες .Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

γ) i) Για $\alpha>2$

ii) Για $x<0$: έχουμε

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=2-\alpha$

δεκτή αν $\alpha>2$

Για $x\geq 0$: έχουμε

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x-2=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2$ δεκτή αν $\alpha\geq -2$

Επομένως για $\alpha>2$ έχουμε δύο σημεία τομής τα Γ(2-α,α) και Δ(α+2,α)

1449. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha,\ \alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

Είναι $f(1)=g(1)=-1,\ f(4)=g(4)=8$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Α(1,-1) και Β(4,4).

β) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση: $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-2x<3x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4<0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

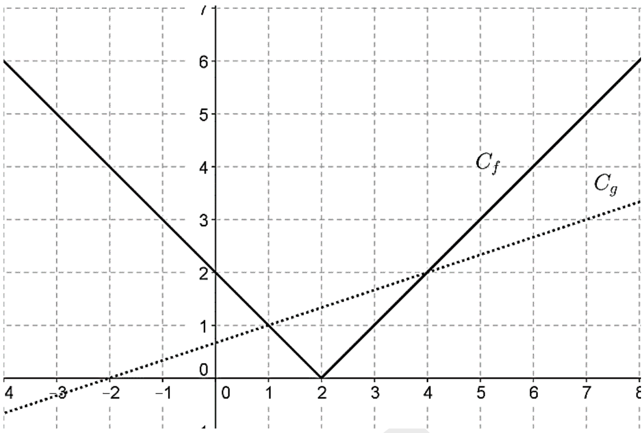
Η λύση της ανίσωσης είναι : $x\in(1,4)$

γ) Πρέπει $f(x)>\alpha\Leftrightarrow x^2-2x>\alpha\Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0$ ισχύει αφού

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0\ \ (\alpha<-1)$

1468. **Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με**

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. **(Μονάδες 6)**

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$ **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι Α(1,1) και Β(4,2).

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow|x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow}|3x-6|=x+2$

Αν $x\le-2$: αδύνατη

Αν $x>-2$: $3x-6=x+2\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4$ ή $3x-6=-x-2\Leftrightarrow 4x=4\Leftrightarrow x=1$

Είναι $f(1)=g(1)=1$, $f(4)=g(4)=2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Α(1,1) και Β(4,2).

γ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

δ) Πρέπει : $3|2-x|-(x+2)\ge 0 \overset{|2-x|=|x-2|}{\Leftrightarrow} |x-2|\ge\frac{1}{3}(x+2)\Leftrightarrow$

$f(x)\ge g(x) \overset{(\gamma\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha)}{\Leftrightarrow} x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

1479. **Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y=60+0,20x$,όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.**

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; **(Μονάδες 5)**

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; **(Μονάδες 5)**

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y=80+0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. **(Μονάδες 10)**

δ) Αν $f(x)=60+0,20\cdot x$ και $g(x)=80+0,10\cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Για $x = 400$: $y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$ ευρώ

β) Για $y = 150$: $150 = 60 + 0,20 \cdot x \Leftrightarrow 0,2 \cdot x = 90 \Leftrightarrow x = \dfrac{90}{0,2} \Leftrightarrow x = 450\,\text{km}$

γ) Έστω $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Α εταιρεία και $g(x) = 80 + 0,10x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Β εταιρεία.

$f(x) - g(x) = 60 + 0,20 \cdot x - 80 - 0,10 \cdot x = 0,1 \cdot x - 20 = 0,1(x - 200)$

Για $x < 200 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Για λιγότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Α εταιρεία
Για ακριβώς 200 km οποιαδήποτε από τις δύο.
Για περισσότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Β εταιρεία.

δ) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20 \cdot x = 80 + 0,10 \cdot x \Leftrightarrow 0,1 \cdot x = 20 \Leftrightarrow x = 200\text{km}$

$f(200) = 60 + 0,2 \cdot 200 = 60 + 40 = 100 = g(200)$

Το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι το Α(200,100).
Για την τετμημένη 200 έχουμε την ίδια χρέωση και στις δύο εταιρείες.

1496. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα ‘RED’ χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα ‘YELLOW’ χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.
α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘RED’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	**0**	**2**	**8**
f (x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘YELLOW’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g (x) (ευρώ)	**2**	**3,2**	**4,8**

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους f(x) , g(x) . (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία ‘RED’ και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

Λύση

α) i) Για $x = 0$ πληρώνουμε μόνο την είσοδο στο TAXI, 1 ευρώ.
Για $x = 2$ πληρώνουμε 1 ευρώ για την είσοδο και $0,6 \cdot 2 = 1,2$ ευρώ για τη διαδρομή, άρα συνολικά $1 + 1,2 = 2,2$ ευρώ
Όμοια για $x = 8$ πληρώνουμε $1 + 0,6 \cdot 8 = 1 + 4,8 = 5,8$ ευρώ

	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Για να πληρώσουμε 2 ευρώ που είναι η είσοδος στο TAXI, δεν έχουμε κάνει καθόλου χιλιόμετρα, άρα $x=0$.

x (km)	0	3	7
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

Για να πληρώσουμε $g(x)=3,2$ ευρώ, αν αφαιρέσουμε τα 2 ευρώ της εισόδου, για τη διαδρομή πληρώνουμε 1,2 ευρώ.

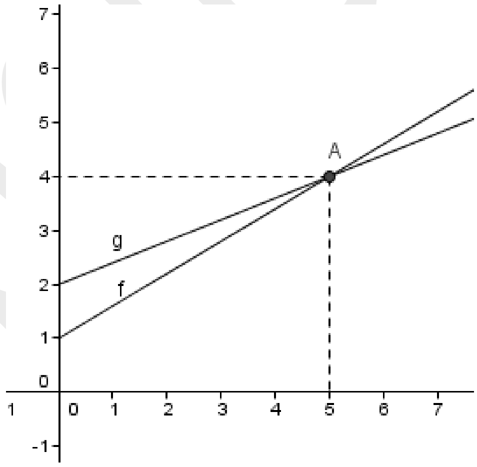
$$\text{Άρα } 0,4\cdot x=1,2 \Leftrightarrow x=\frac{1,2}{0,4}\Leftrightarrow x=3 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Όμοια αφαιρούμε 2 ευρώ της εισόδου και μένουν 2,8 ευρώ για τη διαδρομή.

Άρα $0,4\cdot x=2,8 \Leftrightarrow x=\dfrac{2,8}{0,4}\Leftrightarrow x=7$

β) Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'RED' πληρώνουμε $0,6x$ για τη διαδρομή και 1 ευρώ με την είσοδο, άρα $f(x)=0,6x+1$, x σε km. Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'YELLOW' πληρώνουμε $0,4x$ για τη διαδρομή και 2 ευρώ με την είσοδο, άρα $g(x)=2+0,4\cdot x$,x σε km Είναι $A_f=A_g=[0,+\infty)$

γ) Για την C_f σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,1)$ και διέρχεται από το $(2,2,2)$.
Για την C_g σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,2)$ και διέρχεται από το $(3,\,3,2)$.
Όπως φαίνεται από το σχήμα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(0,5)$,οπότε για διαδρομή μικρότερης των 5 χιλιομέτρων η εταιρεία 'RED' είναι πιο οικονομική.



δ) Έστω x_A τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης Α και x_B τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης Β. Τότε $x_A-x_B=3$ (1)

$$g(x_A)-g(x_B)=0,4x_A+\cancel{2}-0,4x_B-\cancel{2}=0,4(x_A-x_B)=0,4\cdot 3\Leftrightarrow g(x_A)-g(x_B)=1,2$$

Άρα ο πελάτης Α θα πληρώσει παραπάνω 1,2 ευρώ.

1523.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2\end{cases}$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y′y . **(Μονάδες 8)**

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

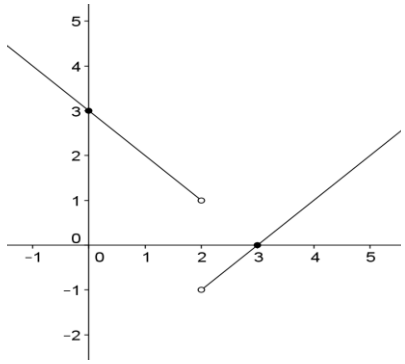
α) Πρέπει $|2-x|\neq 0\Leftrightarrow 2-x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$

β) Για $x>2\Leftrightarrow 2-x<0\Rightarrow |2-x|=x-2$ και $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}}=x-3$

Για $x<2\Leftrightarrow 2-x>0\Rightarrow |2-x|=-x+2=-(x-2)$ και

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{-(x-2)}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{-(\cancel{x-2})}=-(x-3)=-x+3$. Επομένως $f(x)=\begin{cases}x-3, x>2\\ -x+3, x<2\end{cases}$.

γ)



Τα σημεία τομής γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y είναι τα Α(3,0) και Β(0,3) αντίστοιχα.

δ) $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(2,3]$

12944.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)-g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2-(g(x))^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x\neq 0$. (Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\ge 2$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $A=f(2)+g(2)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)-g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\cancel{\dfrac{1}{2}}+2-\cancel{\dfrac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right)=4-\left(\dfrac{1}{2}+2\right)-\left(\dfrac{1}{2}-2\right)=$

$4-\dfrac{1}{2}-\cancel{2}-\dfrac{1}{2}+\cancel{2}=3$

β) Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$(f(x))^2-(g(x))^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=$

$x^2+2+\dfrac{1}{x^2}-x^2+2-\dfrac{1}{x^2}=4$

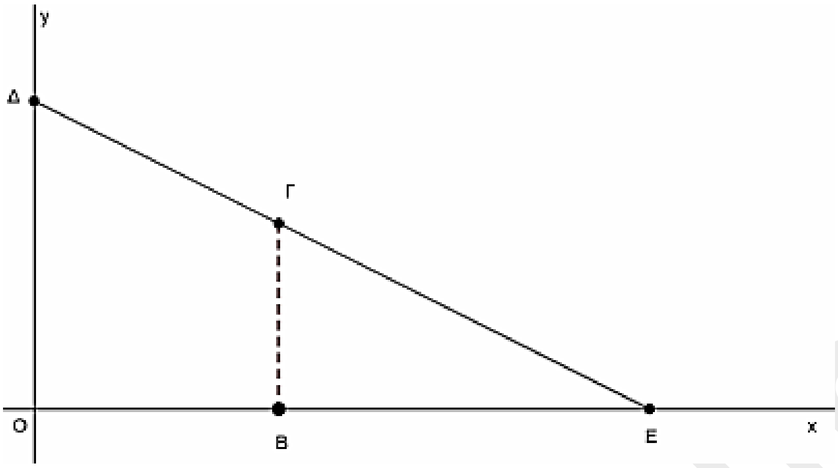
γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης f(x) = α , οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση f(x) =α έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x^2+1=\alpha x \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$.

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-4$.

Επειδή η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2\ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}\ge\sqrt{4} \Leftrightarrow |\alpha|\ge 2$.

12728. **Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον y y' άξονα, Ε ένα σημείο του x΄x άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.**



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ . (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, $y_Γ$) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον y΄y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_Γ=4-\frac{1}{2}t$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{2}t^2$ **εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)**

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η ευθεία $y+\frac{1}{2}x=4$ τέμνει τον y΄y άξονα στο σημείο Δ(0, 4) και τον x΄x άξονα στο σημείο Ε(8, 0), αφού για x = 0, έχουμε: $y+\frac{1}{2}\cdot 0=4 \Leftrightarrow y=4$ και για y = 0, έχουμε: $0+\frac{1}{2}x=4 \Leftrightarrow x=8$

β) Το Γ είναι σημείο του ΔΕ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων Δ(0, 4) και Ε(8, 0). Δηλαδή: $0\le t\le 8$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y+\frac{1}{2}x=4$, οπότε:

$y_Γ+\frac{1}{2}t=4 \Leftrightarrow y_Γ=4-\frac{1}{2}t$.

γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι: $E=\frac{(ΟΔ+ΒΓ)ΟΒ}{2}$, όπου $ΟΔ=y_Δ=4$, $ΒΓ=4-\frac{1}{2}t$ και $ΟΒ=x_Γ=t$,

οπότε $E(t)=\frac{\left(4+4-\frac{1}{2}t\right)t}{2}=\frac{1}{2}\left(8t-\frac{1}{2}t^2\right)=\frac{1}{2}8t-\frac{1}{4}t^2=4t-\frac{1}{4}t^2$ με $0\le t\le 8$.

δ) $E(t)=9,75 \Leftrightarrow 4t-\frac{1}{4}t^2=9,75 \Leftrightarrow 16t-t^2=39 \Leftrightarrow 0=t^2-16t+39 \Leftrightarrow t=3$ ή $t=13$.

Επειδή όμως $0 \le t \le 8$, είναι t = 3, οπότε $x_\Gamma = 3$ και $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$. Άρα $\Gamma(3\,,\,2{,}5)$.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \ne \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$. Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 4 . (Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει f(α) = f(β) . Να αποδείξετε ότι α + β = 2. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\cdot 1 + 1 + (-\sqrt{3})^2 + 2(-\sqrt{3})(-1) + (-1)^2 =$

$3 - \cancel{2\sqrt{3}} + 1 + 3 + \cancel{2\sqrt{3}} + 1 = 8$

β) Ένα σημείο M(x, f(x)) της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = 4 μόνο όταν ισχύει $f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

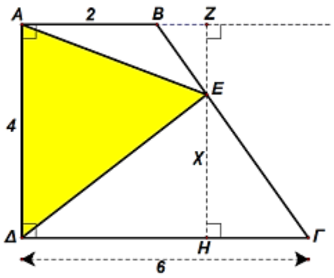
Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $(-1,3)$ είναι οι: 0, 1, 2.

Είναι $f(0) = (0-1)^2 = 1$, $f(1) = (1-1)^2 = 0$, $f(2) = (2-1)^2 = 1$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα (0,1), (1,0) και (2,1).

γ) $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = (\beta-1)^2 \Leftrightarrow |\alpha-1| = |\beta-1| \Leftrightarrow \alpha - 1 = \pm(\beta-1) \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1 = \beta - 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ άτοπο αφού $\alpha \ne \beta)$ ή $(\alpha - 1 = -\beta + 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2)$

12834. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \ldots + f\left(\frac{64}{16}\right)$. (Μονάδες 8)

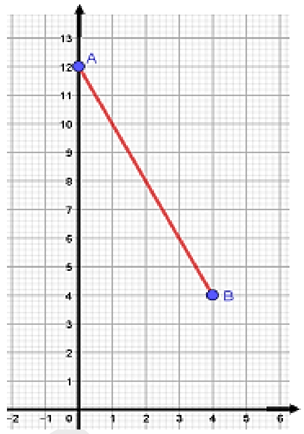
Λύση

α) Είναι $f(x) = (AB\Gamma\Delta) - (ABE) - (E\Delta\Gamma) = \frac{(2+6)\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot(4-x)}{2} - \frac{6x}{2} = 16 - 4 + x - 3x = 12 - 2x$

Για την μεταβλητή x, πρέπει $x \in [0,4]$, αφού απαιτούμε τα μήκη ΕΗ και ΕΖ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x \ge 0$ και $4 - x \ge 0$, άρα $x \le 4$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x+12$ με $x\in\mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι είναι μια ευθεία, οπότε εδώ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα τα σημεία $A(0,12)$ και $B(4,4)$, αφού

$f(0)=-2\cdot 0+12=12$ και $f(4)=-2\cdot 4+12=-8+12=4$.



γ) $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+\ldots+f\left(\frac{64}{16}\right)=$

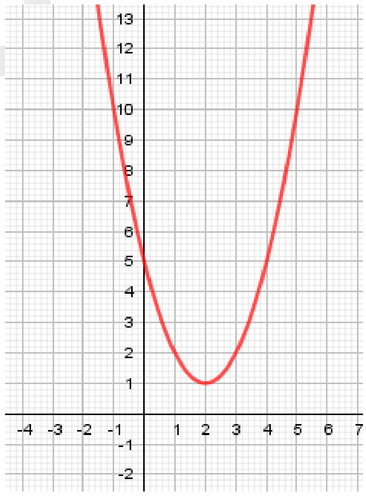
$\left(-2\cdot\frac{1}{16}+12\right)+\left(-2\cdot\frac{2}{16}+12\right)+\ldots+\left(-2\cdot\frac{64}{16}+12\right)=$

$-\frac{2}{16}\cdot 1+12-\frac{2}{16}\cdot 2+12-\ldots-\frac{2}{16}\cdot 64+12=-\frac{2}{16}(1+2+\ldots+64)+12\cdot 64=$

$-\frac{1}{8}\cdot\frac{64(64+1)}{2}+12\cdot 64=-4\cdot 65+768=-260+768=508$

Το άθροισμα $1+2+\ldots+64$ είναι άθροισμα 64 όρων της αριθμητικής προόδου που έχει $\alpha_1=1$ και ω = 1, οπότε $1+2+\ldots+64=\frac{64(64+1)}{2}$.

13091.Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)

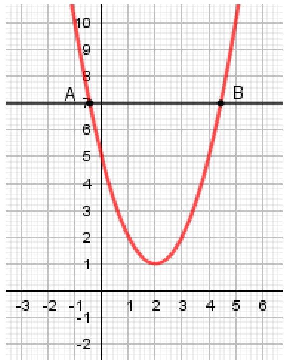
β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.
(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1<x_2$. Να δείξετε ότι $x_1+x_2=4$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Φέρνουμε την ευθεία y = 7 και διαπιστώνουμε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία Α και Β.



Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = 7 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=7$. Είναι

$f(x)=7\Leftrightarrow x^2-4x+5=7\Leftrightarrow x^2-4x-2=0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=24>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, άρα η C_f τέμνει την ευθεία y = 7 σε δύο σημεία.

β) i. Η ευθεία y = λ είναι παράλληλη στον x΄x και τέμνει τον y΄y στο σημείο (0 , λ).

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1.

- Αν λ < 1 η ευθεία y = λ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,

- Αν λ = 1 η ευθεία y = λ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- Αν λ > 1 η ευθεία y = λ έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

Είναι $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(5-\lambda)=16-20+4\lambda=4\lambda-4=4(\lambda-1)$

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

- Αν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4(\lambda-1)>0 \Leftrightarrow \lambda-1>0 \Leftrightarrow \lambda>1$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε η C_f έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία y = λ.
- Αν $\Delta<0 \Leftrightarrow \lambda<1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία y = λ.
- Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα, οπότε η C_f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία y = λ.

γ) Επειδή η ευθεία y = λ τέμνει την C_f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1<x_2$, συμπεραίνουμε ότι λ > 1 και τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Από τους τύπους του Vieta προκύπτει ότι $S=x_1+x_2=-\frac{-4}{1}=4$.

12921.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|\kappa|x-2$ και η ευθεία ε: $y=2x-\kappa^2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ. (Μονάδες 8)

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ). (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2|\kappa|)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=4\kappa^2+8$.

Επειδή για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι Δ > 0, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=y \Leftrightarrow$

$x^2-2|\kappa|x-2=2x-\kappa^2 \Leftrightarrow x^2-2|\kappa|x-2-2x+\kappa^2=0 \Leftrightarrow x^2-2(|\kappa|+1)x+\kappa^2-2=0$ (1)

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα

$\Delta=4(|\kappa|+1)^2-4(\kappa^2-2)=4(\kappa^2+2|\kappa|+1)-4(\kappa^2-2)=4(\cancel{\kappa^2}+2|\kappa|+1-\cancel{\kappa^2}+2)=4(2|\kappa|+3)$

Επειδή για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι Δ > 0, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

γ) Για κ = -3, η (1) γίνεται $x^2-8x+7=0$, έχει διακρίνουσα $\Delta=4(2|-3|+3)=36$ και ρίζες

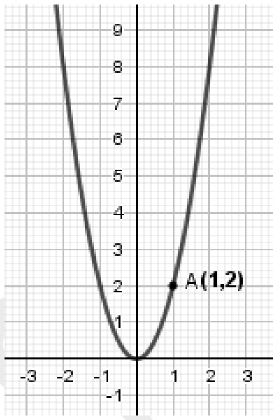
$x_1=\frac{8+\sqrt{36}}{2}=7,\ x_2=\frac{8-\sqrt{36}}{2}=1$

Για x = 1 είναι $y=2\cdot 1-(-3)^2=2-9=-7$ άρα σημείο τομής το $A(1,-7)$ και

για x = 7 είναι $y=2\cdot 7-(-3)^2=14-9=5$ άρα σημείο τομής το $B(7,5)$.

δ) Είναι $(AB)=\sqrt{(7-1)^2+(5-(-7))^2}=\sqrt{36+144}=\sqrt{180}=\sqrt{36\cdot 5}=6\sqrt{5}$

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2,\ x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο Α(1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι α = 2. (Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο (1,6) και έχει κλίση λ = 2. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας *ε* με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε. (Μονάδες 4)

γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$. (Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

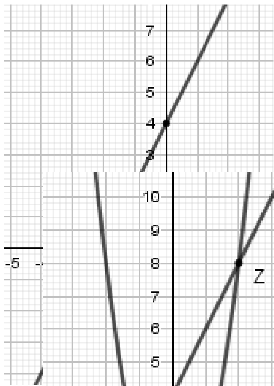
(Μονάδες 7)

Λύση

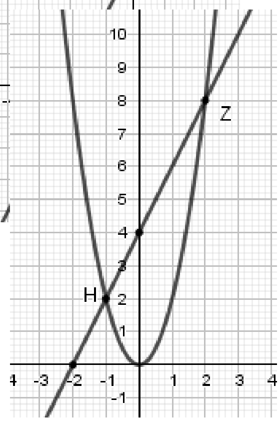
α) Επειδή το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι $f(1)=2\Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2=2\Leftrightarrow \alpha=2$.

β) i. Η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 2 είναι της μορφής $y=2x+\beta$.
Επειδή διέρχεται από το σημείο (1, 6) ισχύει ότι $6=2\cdot 1+\beta\Leftrightarrow \beta=4$, οπότε η ευθεία είναι η $y=2x+4$.

ii. Για $y=0$ είναι $2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2$ και για x = 0 είναι $y=2\cdot 0+4=4$, οπότε η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (-2, 0) και (0,4). Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x\in(-1,2)$.



ii. $f(x)<2x+4\Leftrightarrow 2x^2-2x-4<0\Leftrightarrow x^2-x-2<0$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$ και ρίζες

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2}=2,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$ και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι 1 > 0, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Άρα $x^2-x-2<0\Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

13055. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3{,}52)-f(0{,}52)+f(3{,}48)-f(0{,}48)$. (Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν β =–5. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία. **(Μονάδες 7)**

Λύση

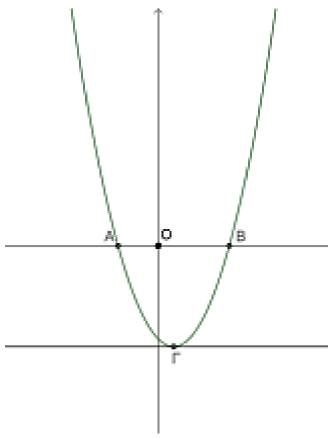
α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = 4 + \cancel{4x} + x^2 - 8 - \cancel{4x} + 5 = x^2 + 1$ και $f(2-x) = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = 4 - \cancel{4x} + x^2 - 8 + \cancel{4x} + 5 = x^2 + 1$, οπότε $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Από τη σχέση $f(2+x) = f(2-x)$ για x = 1,52 έχουμε:
$f(2+1{,}52) = f(2-1{,}52) \Leftrightarrow f(3{,}52) - f(0{,}48) = 0$ (1) και
για x = 1,48 έχουμε: $f(2+1{,}48) = f(2-1{,}48) \Leftrightarrow f(3{,}48) - f(0{,}52) = 0$ (2)
Είναι $A = f(3{,}52) - f(0{,}52) + f(3{,}48) - f(0{,}48) = \left(f(3{,}52) - f(0{,}48)\right) + \left(f(3{,}48) - f(0{,}52)\right) \overset{(1),(2)}{=} 0 + 0 = 0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 2x - 5$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$ που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$. Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν β =–5.

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία μόνο όταν η εξίσωση $f(x) = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 2x - \beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \beta = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.
Επειδή η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού, έχει τουλάχιστον μία λύση αν και μόνο αν $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5-\beta) \ge 0 \Leftrightarrow 36 - 20 + 4\beta \ge 0 \Leftrightarrow 4\beta \ge -16 \Leftrightarrow \beta \ge -4$ οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή β =– 4.

13314.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν Α(α, 0), Β(β, 0), Γ(γ, δ) σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x΄x έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. **(Μονάδες 6)**

β) Να δείξετε ότι $f\left(\sqrt{2}\right) < 0$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή τα σημεία Α, Β ανήκουν στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 0$.
Άρα τα α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$
Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα Δ= 13 και ρίζες $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.
Επειδή α < 0 και β > 0, είναι $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} - 3 = 2 - \sqrt{2} - 3 = -1 - \sqrt{2} < 0$

γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Επειδή $f\left(\sqrt{2}\right)<0$, είναι $\sqrt{2}\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, άρα $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Η παράλληλη από το Γ στον x΄x είναι η y = δ και επειδή έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο, η εξίσωση $f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$ έχει μία μόνο λύση.
Επειδή όμως η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού, έχει μοναδική λύση μόνο όταν
$\Delta=0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3-\delta)=0\Leftrightarrow 1+12+4\delta=0\Leftrightarrow 4\delta=-13\Leftrightarrow \delta=-\frac{13}{4}$.

Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2-x-3+\frac{13}{4}=0\Leftrightarrow 4x^2-4x-12+13=0\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow$
$(2x-1)^2=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, άρα $\gamma=\frac{1}{2}$.

Η τράπεζα μας μάρανε….

Όλα τα υπόλοιπα είναι τέλεια!